W przypadku języka rachunku predykatów pojęcie prawdy jest relatywizowane do tzw. odniesienia przedmiotowego, czyli interpretacji, jaką przyjmujemy dla danego języka. Najprościej mówiąc, prawdziwość danego wyrażenia zależy od tego, co oznaczają występujące w nim symbole: stałe i zmienne nazwowe, symbole funkcyjne oraz stałe predykatowe.

ZADANIE 1
Określ wartość logiczną zdania reprezentowanego przez schemat

$$Q(e) \wedge \bigwedge_{x} [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

przy różnych interpretacjach $\mathfrak{I}_n$:

$\mathfrak{I}_1$ – niech zmienne przebiegają zbiór ludzi; e – oznacza Ewę;
P – oznacza własność bycia matką;
Q – oznacza własność bycia kobietą.

$\mathfrak{I}_2$ – niech zmienne przebiegają zbiór ludzi; e – oznacza Ewę;
P – oznacza własność bycia kobietą;
Q – oznacza własność bycia matką.

$\mathfrak{I}_3$ – niech zmienne przebiegają zbiór liczb; e – oznacza liczbę 1;
P – oznacza własność podzielności przez 2;
Q – oznacza własność podzielności przez 3.

$\mathfrak{I}_4$ – niech zmienne przebiegają zbiór zwierząt; e – oznacza psa Sabę;
P – oznacza własność bycia wielorybem;
Q – oznacza własność bycia ssakiem.

Interpretację, dla której formuła zdaniowa rachunku predykatów jest prawdziwa nazywamy **modelem** tej formuły, zaś interpretację, dla której formuła ta jest fałszywa nazywamy **kontrmodelem** tej formuły.

ZADANIE 2
Sprawdź, które z poniższych interpretacji są modelami, a które kontrmodelami formuły: $\bigvee_{x} P(x)$.

$\mathfrak{I}_5$ – zakresem zmiennych jest zbiór ludzi; P – *ma 200 lat*.

$\mathfrak{I}_6$ – zakresem zmiennych jest zbiór ludzi; P – *jest studentem*.

$\mathfrak{I}_7$ – zakresem zmiennych jest zbiór drzew; P – *ma 200 lat*.

$\mathfrak{I}_8$ – zakresem zmiennych jest zbiór drzew; P – *jest studentem*.

ZADANIE 3
Znajdź model i kontrmodel dla formuł:

(1) $\bigwedge_{x} [P(x) \vee Q(x)]$

(2) $\bigwedge_{x} [P(x) \wedge Q(x)]$

(3) $\bigwedge_{x}\bigwedge_{y}[P(x) \wedge P(y) \rightarrow R(x,y)]$

Jakie są metody wyznaczania wartości logicznych zdań reprezentowanych przez różne formuły przy ustalonej już interpretacji?
Rozważmy 4 przypadki:

1. Prawdziwość zdania egzystencjalnego.
   Niech interpretacja $\mathfrak{I}$ będzie taka, że:
   zakresem zmiennych jest zbiór liczb naturalnych;
   P – własność bycia liczbą parzystą;
   Q – własność bycia liczbą nieparzystą;
   R – relacja bycia dwukrotnością.

$$\bigvee_{x}[P(x) \wedge \bigvee_{y}[Q(y) \wedge R(x,y)]]$$

<u>Podanie przykładu</u> pozwala stwierdzić prawdziwość zdania egzystencjalnego.

2. Fałszywość zdania uniwersalnego.
   Niech interpretacja $\mathfrak{I}$ będzie taka jak wyżej.

$$\bigwedge_{x}[P(x) \rightarrow \bigvee_{y}[Q(y) \wedge R(x,y)]]$$

<u>Podanie kontrprzykładu</u> pozwala stwierdzić fałszywość zdania uniwersalnego.

3. Fałszywość zdania egzystencjalnego.
4. Prawdziwość zdania uniwersalnego.

(3. i 4.:) brak metody rozstrzygania

Tautologia rachunku predykatów to takie wyrażenie języka tego rachunku, które jest schematem wyłącznie zdań prawdziwych, zaś **kontrtautologia** – jest schematem zdań wyłącznie fałszywych.

Innymi słowy, tautologia to taka formuła, dla której nie istnieje kontrmodel (bo wszystkie interpretacje są modelami), natomiast dla kontrtautologii – nie istnieje jej model (wszystkie interpretacje są kontrmodelami).

PRZYKŁADY:

$$\sim\bigwedge_{x}P(x) \leftrightarrow \bigvee_{x}\sim P(x)$$

$$\sim\bigvee_{x}P(x) \leftrightarrow \bigwedge_{x}\sim P(x)$$

$$\bigvee_{x}\bigwedge_{y}R(x,y) \rightarrow \bigwedge_{y}\bigvee_{x}R(x,y)$$

Nie ma efektywnej metody sprawdzania, czy dany schemat języka rachunku predykatów jest tautologią (lub kontrtautologią) – inaczej niż w rachunku zdań, gdzie można to zrobić w skończonej liczbie kroków metodą zero-jedynkową.

ZADANIE 4
Ustal, które z poniższych schematów są tautologiami:

(1) $\bigwedge_x P(x) \leftrightarrow \sim \bigvee_x \sim P(x)$

(2) $\bigvee_x P(x) \leftrightarrow \sim \bigwedge_x \sim P(x)$

(3) $\bigwedge_x [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \bigwedge_x P(x) \wedge \bigwedge_x Q(x)$

(4) $\bigwedge_x \bigwedge_y R(x,y) \rightarrow \bigwedge_x R(x,x)$

(5) $\bigvee_x \bigvee_y R(x,y) \rightarrow \bigvee_x R(x,x)$

(6) $\bigwedge_x R(x,x) \rightarrow \bigwedge_x \bigwedge_y R(x,y)$

Na ogół łatwiej jest wykazać, że dana formuła NIE jest tautologią (lub że NIE jest kontrtautologią): wystarczy mianowicie wskazać jakikolwiek kontrmodel (model) tej formuły.

PRZYKŁAD:

Formuła: $\bigwedge_x [P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \bigwedge_x P(x) \vee \bigwedge_x Q(x)$

nie jest tautologią, bo interpretacja ze zbiorem liczb naturalnych jako uniwersum i predykatami: P – *jest parzysty* oraz Q – *jest nieparzysty* jest kontrmodelem tej formuły.
Nie jest to również kontrtautologia, gdyż interpretacja ze zbiorem liczb naturalnych jako uniwersum i predykatami: P – *jest dodatni* oraz Q – *jest ujemny* jest modelem tej formuły.

ZADANIE 5
Udowodnij (podając odpowiednio kontrmodel i model), że poniższe formuły nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami.

(1) $\bigvee_x P(x) \rightarrow \bigwedge_x P(x)$

(2) $\bigvee_x P(x) \rightarrow \bigvee_x \sim P(x)$

(3) $\sim \bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$

(4) $\left[\bigvee_x P(x) \wedge \bigvee_x Q(x)\right] \rightarrow \bigvee_x \left[P(x) \wedge Q(x)\right]$

(5) $\bigwedge_x \bigwedge_y \left[R(x,y) \rightarrow R(y,x)\right]$

(6) $\bigwedge_x \bigwedge_y \left[R(x,y) \rightarrow \sim R(y,x)\right]$

(7) $\bigwedge_x \bigvee_y R(x,y) \rightarrow \bigvee_y \bigwedge_x R(x,y)$

Rozszerzymy teraz pojęcie prawdy dla języka rachunku predykatów (tym samym rozszerzając klasę tautologii): mianowicie będziemy nazywali prawdziwymi nie tylko pewne zdania, ale i niektóre funkcje zdaniowe języka rachunku predykatów, a konkretnie te, które stają się zdaniami prawdziwymi po poprzedzeniu ich kwantyfikatorami uniwersalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne występujące w danej funkcji zdaniowej.
Tak więc funkcję zdaniową uważamy za prawdziwą, gdy jest spełniona przez dowolne obiekty z uniwersum.

PRZYKŁAD:
Funkcja zdaniowa

Jeśli x jest starszy od y, to y jest młodszy od x.

jest prawdziwa, bo prawdą jest zdanie

Dla każdego x i dla każdego y: jeśli x jest starszy od y, to y jest młodszy od x.

Natomiast funkcja zdaniowa

x jest starszy od y lub y jest starszy od x.

nie jest prawdziwa, bo fałszywe jest np. zdanie

Janek jest starszy od Janka lub Janek jest starszy od Janka.

(czyli para (Janek,Janek) nie spełnia tej funkcji).

ZADANIE 6 *
Które z poniższych funkcji zdaniowych są prawdziwe?

(1) x+y = y+x
(2) *Jeżeli x jest prostą, a y jest punktem nie leżącym na x, to istnieje takie z, że z jest prostą, y leży na z i z jest równoległe do x.*
(3) *Jeżeli x jest podobne do y, a y jest podobne do z, to x jest podobne do z.*
(4) *Jeżeli x jest ojcem y, a z jest ojcem x, to z jest dziadkiem y.*
(5) *Jeżeli x jest synem y, a y jest synem z, to z jest dziadkiem x.*
(6) *Jeżeli x jest zdaniem prawdziwym, to jeżeli y jest zdaniem fałszywym, to y nie wynika logicznie z x.*

* Zadania 3-6 pochodzą z „Ćwiczeń z logiki" B. Stanosz.