Tautologiami KRP są m.in. wszystkie formuły, które są logicznie prawdziwe na gruncie KRZ – tj. które są podstawieniami tautologii KRZ, gdzie za zmienne zdaniowe podstawia się formuły KRP.

Kilka podstawowych tautologii swoistych dla rachunku predykatów:

1. prawo dictum de omni (orzekanie ze wszystkiego)

(prawo opuszczania kwantyfikatora ogólnego)

$$\bigwedge_x P(x) \to P(x)$$

Inne wersje:

$$\bigwedge_x P(x) \to P(y)$$

$\bigwedge_x P(x) \to P(a)$ gdzie $a$ - dowolna stała nazwowa

$\bigwedge_x P(x) \to P(\alpha)$ gdzie $\alpha$ - dowolny term

2. prawo dictum de singulo (orzekanie z pojedynczego)

(prawo dołączania kwantyfikatora szczegółowego)

$$P(x) \to \bigvee_x P(x)$$

Inne wersje:

$$P(y) \to \bigvee_x P(x)$$

$P(a) \to \bigvee_x P(x)$ gdzie $a$ - dowolna stała nazwowa

$P(\alpha) \to \bigvee_x P(x)$ gdzie $\alpha$ - dowolny term

3. prawo subalternacji

$$\bigwedge_x P(x) \to \bigvee_x P(x)$$

4. dictum de nullo (orzekanie z niczego)

$$\bigwedge_x \sim P(x) \to \bigvee_x \sim P(x)$$

5. prawa przemianowywania (zamiany) zmiennych związanych

$$\bigwedge_x P(x) \leftrightarrow \bigwedge_y P(y)$$

$$\bigvee_x P(x) \leftrightarrow \bigvee_y P(y)$$

6. prawa de Morgana w języku rachunku predykatów
(czyli prawa negowania dla kwantyfikatorów)

$$\sim \bigvee_x P(x) \leftrightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$$

$$\sim \bigwedge_x P(x) \leftrightarrow \bigvee_x \sim P(x)$$

7. prawa zastępowania (eliminacji) kwantyfikatorów

$$\bigvee_x P(x) \leftrightarrow \sim \bigwedge_x \sim P(x)$$

$$\bigwedge_x P(x) \leftrightarrow \sim \bigvee_x \sim P(x)$$

8. prawo przestawiania dużych kwantyfikatorów

$$\bigwedge_x \bigwedge_y R(x,y) \leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x R(x,y)$$

9. prawo przestawiania małych kwantyfikatorów

$$\bigvee_x \bigvee_y R(x,y) \leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x R(x,y)$$

10. prawo przestawiania małego kwantyfikatora za duży kwantyfikator

$$\bigvee_x \bigwedge_y R(x,y) \rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x R(x,y)$$

11. prawo rozdzielności kwantyfikatora uniwersalnego względem koniunkcji

$$\bigwedge_x \left[P(x) \wedge Q(x)\right] \leftrightarrow \bigwedge_x P(x) \wedge \bigwedge_x Q(x)$$

12. prawo rozdzielności kwantyfikatora egzystencjalnego względem alternatywy

$$\bigvee_x \left[P(x) \vee Q(x)\right] \leftrightarrow \bigvee_x P(x) \vee \bigvee_x Q(x)$$

13. schemat wyciągania kwantyfikatora uniwersalnego przed alternatywę

$$\bigwedge_x P(x) \vee \bigwedge_x Q(x) \rightarrow \bigwedge_x \left[P(x) \vee Q(x)\right]$$

14. schemat rozkładania kwantyfikatora egzystencjalnego na koniunkcję

$$\bigvee_x \left[P(x) \wedge Q(x)\right] \rightarrow \bigvee_x P(x) \wedge \bigvee_x Q(x)$$

15. schemat rozkładania kwantyfikatora uniwersalnego na implikację

$$\bigwedge_x \left[P(x) \rightarrow Q(x)\right] \rightarrow \left[\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigwedge_x Q(x)\right]$$

16. schemat rozkładania kwantyfikatora egzystencjalnego

(a właściwie: dużego na dwa małe)

$$\bigwedge_{x}[P(x) \to Q(x)] \to [\bigvee_{x} P(x) \to \bigvee_{x} Q(x)]$$

17. $\bigwedge_{x}[P(x) \to Q(x)] \wedge \bigwedge_{x}[Q(x) \to R(x)] \to \bigwedge_{x}[P(x) \to R(x)]$

18. prawa ekstensjonalności dla kwantyfikatorów

$$\bigwedge_{x}[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \to [\bigwedge_{x} P(x) \leftrightarrow \bigwedge_{x} Q(x)]$$

$$\bigwedge_{x}[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \to [\bigvee_{x} P(x) \leftrightarrow \bigvee_{x} Q(x)]$$

$$\bigwedge_{x}[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \to \bigwedge_{x}[P(x) \to Q(x)] \wedge \bigwedge_{x}[Q(x) \to P(x)]$$

Często stosowane <u>skróty</u>:

$$\bigwedge_{x,y} R(x,y) \overset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{x}\bigwedge_{y} R(x,y)$$

$$\bigvee_{x,y} R(x,y) \overset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x}\bigvee_{y} R(x,y)$$

i analogicznie $\bigwedge_{x,y,z} S(x,y,z)$ czy $\bigvee_{x,y,z} S(x,y,z)$ itd.

Także tzw. <u>kwantyfikatory ograniczone</u> stanowią jedynie skrótowy zapis pewnych ustalonych wyrażeń:

$$\bigwedge_{P(x)} Q(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{x}[P(x) \to Q(x)]$$

$$\bigvee_{P(x)} Q(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x}[P(x) \wedge Q(x)]$$

Zapis taki nie oznacza kwantyfikowania po predykatach! Chodzi tu wyłącznie o ograniczenie zakresu kwantyfikatorów. Kwantyfikatory ograniczone nie kwantyfikują jakby po całym uniwersum, a jedynie po jego podzbiorze – mianowicie po zbiorze tych tylko obiektów, które spełniają warunek podany pod kwantyfikatorem. Dla kwantyfikatorów ograniczonych obowiązują analogiczne prawa jak dla zwykłych kwantyfikatorów (np. prawa de Morgana, prawa rozdzielności itp.).

PRZYKŁADY:

(1) $\bigwedge_{x<0} x^2 > 0 \leftrightarrow \bigwedge_{x} [x < 0 \rightarrow x^2 > 0]$

(2) $\bigvee_{x<0} x^2 > 0 \leftrightarrow \bigvee_{x} [x < 0 \wedge x^2 > 0]$

(3) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n \geqslant 0 \leftrightarrow \bigwedge_{n} [n \in \mathbb{N} \rightarrow n \geqslant 0]$

(4) $\bigwedge_{i,j,k \in \mathbb{N}} P(i,j,k) \leftrightarrow \bigwedge_{i} \bigwedge_{j} \bigwedge_{k} [i \in \mathbb{N} \wedge j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \rightarrow P(i,j,k)]$

Kolejne przykłady pokażą, jak w języku rachunku predykatów z identycznością wyrazić można ile przedmiotów posiada pewną własność.

ZADANIE 1
Odczytaj poniższe schematy, jeśli stałe predykatowe oznaczają odpowiednio własności: S – *jest studentem,* Z – *zdał egzamin*, a stała nazwowa r oznacza Roberta.

(1) $\bigvee_{x} [S(x) \wedge Z(x) \wedge \bigvee_{y} [S(y) \wedge Z(y) \wedge \sim (y = x)]]$

(2) $\bigvee_{x} [S(x) \wedge Z(x) \wedge \sim \bigvee_{y} [S(y) \wedge Z(y) \wedge \sim (y = x)]]$

(3) $Z(r) \wedge \bigvee_{x} [Z(x) \wedge \sim (x = r)]$

W rachunku predykatów z identycznością można zdefiniować tzw. <u>kwantyfikator jednostkowy</u> – *istnieje dokładnie* 1 *x taki, że*:

$$\bigvee_{x}! F(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x} F(x) \wedge \sim \bigvee_{x} \bigvee_{y} [F(x) \wedge F(y) \wedge \sim (x = y)]$$

Analogicznie można wprowadzać inne <u>kwantyfikatory ilościowe</u>, takie jak np. *istnieją dokładnie* 2 *obiekty takie, że*, czy ogólnie *istnieje dokładnie* n *obiektów takich, że*, (gdzie n jest dowolną liczbą naturalną), a także kwantyfikatory typu *istnieje co najwyżej* n *obiektów takich, że*, albo *istnieje co najmniej* n *obiektów takich, że*.
Natomiast <u>kwantyfikatory uogólnione</u> typu *istnieje nieskończenie wiele*, *istnieje przeliczalnie wiele*, *istnieje nieprzeliczalnie wiele*, albo też *istnieje tyle samo (więcej / mniej) x takich, że A(x), co y takich, że B(y)* , nie są już definiowalne w klasycznym rachunku predykatów z identycznością.

Analogicznie jak w rachunku zdań definiuje się w rachunku predykatów pojęcia <u>prawdy logicznej</u>, <u>fałszu logicznego</u>, <u>wynikania logicznego</u>, <u>logicznej równoważności</u>, <u>wnioskowania dedukcyjnego</u> czy <u>sprzecznego zbioru zdań</u>.

Musimy tylko pamiętać o tym, że pojęcie tautologii rozszerzone jest na funkcje zdaniowe, stąd prawdami logicznymi mogą być nie tylko zdania, ale i funkcje zdaniowe. Oczywiście każda tautologia rachunku zdań będzie też tautologią rachunku predykatów.

ZADANIE 2*

Wskaż prawdy logiczne wśród podanych niżej wyrażeń.

(1) *Jeśli każdy Ziemianin jest istotą rozumną, to każda istota rozumna jest Ziemianinem.*

(2) *Jeśli każdy Marsjanin jest istotą rozumną, to jeśli istnieją Marsjanie, to istnieją istoty rozumne.*

ZADANIE 3

Określ czy zdanie *Istnieją przekupni sędziowie* wynika logicznie ze zdania *Nieprawda, że każdy sędzia jest nieprzekupny*.

ZADANIE 4

Które z podanych niżej zdań wynika logicznie ze zdania

(*) *Każda teoria opiera się na pewnych aksjomatach.*

(1) *Istnieje taki aksjomat, na którym opiera się każda teoria.*

(2) *Nieprawda, że istnieje taki aksjomat, na którym opiera się każda teoria.*

(3) *Nieprawda, że istnieje teoria nie opierająca się na żadnym aksjomacie.*

(4) *Pewna teoria opiera się na pewnym aksjomacie.*

ZADANIE 5

Wskaż pary zdań logicznie równoważnych wśród zdań podanych poniżej.

(1) *Każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe.*

(2) *Istnieją zdania fałszywe i istnieją zdania prawdziwe.*

(3) *Nieprawda, że każde zdanie jest prawdziwe.*

(4) *Nieprawda, że istnieją zdania, które nie są ani prawdziwe ani fałszywe.*

(5) *Nieprawda, że (żadne zdanie nie jest fałszywe lub żadne zdanie nie jest prawdziwe).*

(6) *Istnieją zdania, które nie są prawdziwe.*

ZADANIE 6

Sprawdź, które z podanych niżej wnioskowań są dedukcyjne.

(1) *Każdy uczony jest racjonalistą.*
*Niektórzy filozofowie nie są racjonalistami.*
*Zatem niektórzy filozofowie nie są uczonymi.*

(2) *Niektórzy filozofowie są materialistami.*
*Niektórzy filozofowie są racjonalistami.*
*Zatem niektórzy materialiści są racjonalistami.*

(3) *Niektórzy uczeni nie cenią żadnego filozofa.*
*Każdy filozof jest uczonym.*
*Zatem niektórzy filozofowie nie cenią samych siebie.*

* Zadania 2-9 pochodzą z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.

(4) *Istnieje kwas, który działa na każdy metal.*
*Zatem na każdy metal działa jakiś kwas.*

(5) *Istnieje kwas, który działa na każdy metal.*
*Zatem każdy kwas działa na jakiś metal.*

Formuła zdaniowa A zawierająca nazwę indywiduową **a** jest prawdą logiczną wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A**'** powstająca z A przez konsekwentne zastąpienie nazwy **a** zmienną x (która nie występuje w A jako wolna i nie stanie się związana w A**'**) jest prawdą logiczną.

ZADANIE 7

Zbadaj, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne.

(1) *Ludzie są rozumniejsi od zwierząt.*
*Zatem skoro Jasiu jest człowiekiem, a Krasula jest zwierzęciem, to Jasiu jest rozumniejszy od Krasuli.*

(2) *Niektórzy ludzie lubią każdego, kto jest o nich dobrego zdania.*
*Jan jest dobrego zdania o każdym człowieku.*
*Zatem niektórzy ludzie lubią Jana.*

(3) *Każdy krytyk literacki ceni pewnego pisarza, a niektórzy pisarze nie cenią żadnego krytyka literackiego.*
*Piotr jest krytykiem literackim.*
*Zatem Piotr ceni kogoś, kto jego nie ceni.*

ZADANIE 8

Zbadaj, które z podanych niżej zbiorów formuł są semantycznie sprzeczne.

(1)
$$\bigwedge_{x} [P(x) \to Q(x)]$$
$$\bigwedge_{x} [Q(x) \to \bigvee_{y} R(x,y)]$$
$$\bigvee_{x} P(x)$$
$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{y} \sim R(x,y)$$

(2)
$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{y} [P(x) \wedge Q(y) \to R(x,y)]$$
$$\bigvee_{x} [P(x) \wedge Q(x)]$$
$$\bigwedge_{x} [P(x) \to \sim R(x,x)]$$

ZADANIE 9

Oceń pod względem poprawności formalnej i materialnej podane niżej wnioskowania.

(1) *Każde twierdzenie udowodnione jest prawdziwe.*
*Każde twierdzenie prawdziwe opisuje pewien fakt.*
*Zatem twierdzenia nieudowodnione nie opisują żadnych faktów.*

(2) *Każde twierdzenie oczywiste jest prawdziwe.*
*Każdy człowiek uznaje wszystkie twierdzenia oczywiste.*
*Zatem każdy człowiek uznaje wszystkie prawdziwe twierdzenia.*

Na koniec jeszcze powtórka z teorii (wszystko tak, jak było w rachunku zdań):

Zdanie $\beta$ **wynika logicznie** ze zbioru zdań $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ witw, gdy zdanie postaci

„*Jeśli* $\alpha_1$ *i* $\alpha_2$ *i* … *i* $\alpha_n$ *to* $\beta$”

jest prawdą logiczną.

Analogicznie, formuła B **wynika logicznie** ze zbioru formuł $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ witw, gdy implikacja $(A_1) \wedge (A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n) \rightarrow (B)$ jest tautologią.
Fakt ten zapisujemy następująco: $X \vDash B$ lub $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B$ .

Załóżmy, że X jest dowolnym zbiorem formuł KRP, zaś A i B to dowolne formuły KRP. Zachodzą wówczas następujące zależności:

Każda formuła należąca do zbioru formuł wynika logicznie z tego zbioru:

Jeśli $A \in X$, to $X \vDash A$ .

Ponadto:

Formuła A jest tautologią witw, gdy wynika logicznie ze zbioru pustego:

$$\vDash A \leftrightarrow \varnothing \vDash A$$

**Semantyczne twierdzenie o dedukcji**

Jeśli $\beta$ wynika logicznie ze zbioru X i formuły $\alpha$, to implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ wynika logicznie ze zbioru X:

Jeśli $X \cup \{A\} \vDash B$, to $X \vDash A \rightarrow B$.

**Semantyczne odwrotne twierdzenie o dedukcji**

Jeśli implikacja $A \rightarrow B$ wynika logicznie ze zbioru X, to B wynika logicznie ze zbioru X i formuły A:

Jeśli $X \vDash A \rightarrow B$, to $X \cup \{A\} \vDash B$.

WNIOSEK

$X \cup \{A\} \models B$ witw, gdy $X \models A \to B$.

W szczególności (dla $X=\emptyset$)

$A \models B$ witw, gdy $\models A \to B$.

Zbiór zdań nazywamy **semantycznie sprzecznym** witw, gdy koniunkcja wszystkich zdań z tego zbioru jest fałszem logicznym.
Zbiór formuł nazywamy **semantycznie sprzecznym** witw, gdy koniunkcja wszystkich należących do niego formuł jest kontrtautologią.

Innymi słowy zbiór semantycznie sprzeczny ma tę własność, że zdania (formuły), które do niego należą, nie mogą być wszystkie jednocześnie prawdziwe.

W szczególności zbiór zawierający dwa zdania sprzeczne jest zbiorem sprzecznym.

**Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost**

1. Zbiór formuł $X \cup \{ A \}$ jest semantycznie sprzeczny witw, gdy $X \models \sim A$.
2. Zbiór formuł $X \cup \{\sim A \}$ jest semantycznie sprzeczny witw, gdy $X \models A$.

Zbiór jest więc semantycznie sprzeczny witw, gdy jest w nim taka formuła, że jej negacja wynika z pozostałych formuł tego zbioru.

Ponadto można pokazać, że:

Zbiór formuł X jest **semantycznie sprzeczny** witw, gdy wynikają z niego logicznie dwie formuły sprzeczne:

$X \models A$ oraz $X \models \sim A$ .