$A(x/\alpha)$ – oznacza wynik prawidłowego podstawienia termu α za zmienną x w formule A.

Prawidłowe podstawienie termu do wyrażenia prawdziwego powinno zawsze dawać wyrażenie prawdziwe. Gwarancją tego jest spełnienie trzech warunków:

(1) Podstawiamy wyłącznie za zmienne wolne.

(2) Podstawiamy konsekwentnie, tj. w każdym miejscu, gdzie występuje dana zmienna wolna podstawiamy ten sam term.

(3) Żadna zmienna wolna termu, który podstawiamy, nie może zostać związana w wyniku podstawienia.

Jeśli $A(x/\alpha)$ jest prawidłowym podstawieniem, to mówimy też, że term α jest podstawialny za zmienną x w wyrażeniu A.

KRP, podobnie jak KRZ, można przedstawić w formie systemu aksjomatycznego. Pojęcie dowodu i twierdzenia pozostaje takie samo.
Trzeba ustalić zestaw aksjomatów i reguł dowodzenia tak, aby dało się z tych aksjomatów wyprowadzać prawa logiki KRP (tj. system dowodzenia powinien być trafny).
Trzy przedstawione poniżej systemy aksjomatyczne KRP są trafne oraz są wzajemnie sobie równoważne, tj. posiadają ten sam zbiór twierdzeń (czyli formuł dowodliwych w systemie).

(I) Dla dowolnych formuł A, B, C rachunku predykatów oraz dowolnych liter predykatowych P i Q aksjomatami są formuły postaci:

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$

(4) $\bigwedge_u P(u) \to P(u/v)$

(5) $P \to \bigwedge_u P(u)$ pod warunkiem, że u nie jest zmienną wolną w P

(6) $\bigwedge_u [P(u) \to Q(u)] \to [\bigwedge_u P(u) \to \bigwedge_u Q(u)]$

Reguły wnioskowania:

- reguła odrywania (**RO**)
- reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego (**D**$\bigwedge$)

(II) Aksjomatykę stanowi zbiór wszystkich aksjomatów pewnego zaksjomatyzowanego systemu rachunku zdań, w których za zmienne zdaniowe podstawia się odpowiednio formuły zdaniowe rachunku predykatów. Reguły wnioskowania – jak w systemie **(III)**.

(III) Aksjomatykę stanowi zbiór wszystkich twierdzeń rachunku zdań, w których za zmienne zdaniowe podstawia się odpowiednio formuły zdaniowe rachunku predykatów. Reguły wnioskowania:

- reguła odrywania **(RO)**

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ A\end{array}}{B}$$

- reguła podstawiania **(RP)**

$$\frac{A}{A(u/\alpha)}$$

($A(u/\alpha)$ – prawidłowe podstawienie termu α za zmienną u w formule A).

- reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego w następniku **(O$\bigwedge$N)**

$$\frac{A \to \bigwedge_u B}{A \to B}$$

- reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego w następniku **(D$\bigwedge$N)**

$$\frac{A \to B}{A \to \bigwedge_u B}$$

pod warunkiem, że zmienna u nie jest zmienną wolną w A.

- reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego w poprzedniku **(O$\bigvee$P)**

$$\frac{\bigvee_u A \to B}{A \to B}$$

- reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego w poprzedniku **(D$\bigvee$P)**

$$\frac{A \to B}{\bigvee_u A \to B}$$

pod warunkiem, że zmienna u nie jest zmienną wolną w B.

- reguła uogólniania **(RU)**

$$\frac{A}{\bigwedge_u A}$$

ZADANIE

Udowodnij poniższe formuły w systemie **(III)**.

(T1) $\bigwedge_x A \to A$

(T2) $\bigwedge_x A \to A(x/\alpha)$ o ile α jest podstawialne za x w A

(T3) $A \to \bigvee_x A$

(T4) $A(x/\alpha) \to \bigvee_x A$ o ile α jest podstawialne za x w A

(T5) $\bigwedge_x A \to \bigvee_x A$

(T6) $\bigwedge_x A \leftrightarrow A$ o ile x nie jest zmienną wolną w A

(T7) $\bigvee_x A \leftrightarrow A$ o ile x nie jest zmienną wolną w A

(T8) $\bigwedge_x A \leftrightarrow \bigwedge_y A(x/y)$ o ile y nie jest zmienną wolną w A oraz y jest podstawialne za x w A

(T9) $\bigvee_x A \leftrightarrow \bigvee_y A(x/y)$ o ile y nie jest zmienną wolną w A oraz y jest podstawialne za x w A

(T10) $\bigwedge_x \bigwedge_y A \leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x A$

(T11) $\bigvee_x \bigvee_y A \leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x A$

(T12) $\bigvee_x \bigwedge_y A \to \bigwedge_y \bigvee_x A$

(T13) $\bigvee_x \sim A \to \sim \bigwedge_x A$