

KRP, podobnie jak KRZ, można przedstawić w formie systemu założeniowego. Pojęcie dowodu (wprost i nie wprost) pozostaje takie samo. Natomiast za reguły wnioskowania przyjmujemy wszystkie reguły pierwotne i wtórne systemu założeniowego rachunku zdań (w odpowiednio rozszerzonej interpretacji) oraz swoiste reguły pierwotne dla rachunku kwantyfikatorów: reguły dołączania i opuszczania kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego.

W poniższych regułach  $A$  oznacza dowolną formułę zdaniową języka rachunku predykatów,  $\alpha$  – dowolny term,  $a$  – dowolną stałą nazwową, zaś  $A(u/\alpha)$  – prawidłowe podstawienie.

- **(O $\wedge$ )** reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego:

$$\frac{\bigwedge_u A}{A(u/\alpha)}$$

Jeśli do dowodu należy formuła zdaniowa skwantyfikowana ogólnie, to wolno dołączyć do dowodu dowolne prawidłowe podstawienie tej formuły zdaniowej ( $a$  w szczególności – tę samą formułę zdaniową).

- **(D $\wedge$ )** reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego:

$$\frac{A}{\bigwedge_u A}$$

pod warunkiem, że zmienna  $u$  nie jest wolna w założeniach dowodu, ani nie jest indeksem.

Jeśli do dowodu należy formuła zdaniowa  $A$ , to wolno dołączyć do dowodu tę formułę skwantyfikowaną ogólnie (pod podanym wyżej warunkiem).

- **(D $\vee$ )** reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego:

$$\frac{A(u/\alpha)}{\bigvee_u A}$$

pod warunkiem, że zmienna  $u$  nie jest indeksem.

Jeśli do dowodu należy formuła zdaniowa  $A$  lub jej prawidłowe podstawienie, to wolno dołączyć do dowodu tę formułę skwantyfikowaną szczegółowo (pod podanym wyżej warunkiem).

- **(O $\vee$ )** reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego:

$$(a) \quad \frac{\bigvee_u A(u)}{A(u/a)}$$

pod warunkiem, że nazwa  $a$  nie występowała dotąd w żadnym wierszu dowodu..

Jeśli do dowodu należy formuła zdaniowa  $A(u)$  (o jednej tylko zmiennej wolnej  $u$ ) skwantyfikowana szczegółowo (względem tej zmiennej), to wolno dołączyć do dowodu dowolne prawidłowe podstawienie stałej nazwowej za tę zmienną w danej formule zdaniowej (pod podanym wyżej warunkiem).

$$(b) \quad \frac{\bigvee_u A(u, u_1, \dots, u_n)}{A(u/a_{u_1, \dots, u_n}, u_1, \dots, u_n)} \quad \text{pod warunkiem, że nazwa } a_{u_1, \dots, u_n} \text{ nie występowała dotąd w żadnym wierszu dowodu..}$$

Jeśli do dowodu należy formuła zdaniowa  $A(u, u_1, \dots, u_n)$  (w której wszystkimi zmiennymi wolnymi są  $u, u_1, \dots, u_n$ ) skwantyfikowana szczegółowo (względem zmiennej  $u$ ), to wolno dołączyć do dowodu dowolne prawidłowe podstawienie stałej nazwowej  $a_{u_1, \dots, u_n}$  (zdeteminowanej przez zmienne  $u_1, \dots, u_n$  jako indeksy) za tę zmienną w danej formule zdaniowej (pod podanym wyżej warunkiem).

Uwaga 1: Podstawiana według tej reguły stała nazwowa oznacza tu pewien (bliżej nieokreślony) przedmiot, dla którego prawdziwy jest wniosek tej reguły, o ile tylko prawdziwa jest jej przesłanka.

Uwaga 2: Rolę podstawianej tu nazwy może również pełnić zmienna (pod podanym wyżej warunkiem).

#### ZADANIE 1

Przeprowadź dowody założeniowe następujących formuł (w p. (8)–(12) skorzystaj z podanych obok wskazówek):

- (1)  $\bigwedge_x P(x) \rightarrow P(x)$
- (2)  $P(x) \rightarrow \bigvee_x P(x)$
- (3)  $\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigvee_x P(x)$
- (4)  $\bigwedge_x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigwedge_x Q(x)]$
- (5)  $\bigwedge_x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\bigvee_x P(x) \rightarrow \bigvee_x Q(x)]$
- (6)  $\bigwedge_x \bigwedge_y R(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x R(x, y)$
- (7)  $\bigvee_x \bigwedge_y R(x, y) \rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x R(x, y)$
- (8)  $\bigwedge_x \sim P(x) \rightarrow \sim \bigvee_x P(x)$  (nie wprost)
- (9)  $\sim \bigvee_x P(x) \rightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$  (dictum de singulo)
- (10)  $\sim \bigvee_x P(x) \leftrightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$
- (11)  $\sim \bigvee_x P(x) \rightarrow \bigvee_x \sim P(x)$  (dictum de singulo)
- (12)  $\bigwedge_x \sim P(x) \rightarrow \sim \bigwedge_x P(x)$  (dictum de omni)

## ZADANIE 2

Sprawdź, czy poniższe ciągi formuł są poprawnymi dowodami:

(I) dla formuły  $\bigwedge_x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow \bigwedge_x Q(x)]$

- |     |                                       |                |
|-----|---------------------------------------|----------------|
| (1) | $\bigwedge_x [P(x) \rightarrow Q(x)]$ | (zał.)         |
| (2) | $P(x)$                                | (zał.)         |
| (3) | $P(x) \rightarrow Q(x)$               | (O $\wedge$ 1) |
| (4) | $Q(x)$                                | (RO 2,3)       |
| (5) | $\bigwedge_x Q(x)$                    | (D $\wedge$ 4) |

(II) dla formuły  $[\bigvee_x P(x) \wedge \bigvee_x \sim P(x)] \rightarrow \bigvee_x [P(x) \wedge \sim P(x)]$

- |     |   |          |
|-----|---|----------|
| (1) | $\bigvee_x P(x) \wedge \bigvee_x \sim P(x)$ | (zał.)   |
| (2) | $\bigvee_x P(x)$                            | (OK 1)   |
| (3) | $\bigvee_x \sim P(x)$                       | (OK 1)   |
| (4) | $P(a)$                                      | (OV 2)   |
| (5) | $\sim P(a)$                                 | (OV 3)   |
| (6) | $P(a) \wedge \sim P(a)$                     | (DK 4,5) |
| (7) | $\bigvee_x [P(x) \wedge \sim P(x)]$         | (DV 6)   |