PODSTAWOWE WŁASNOŚCI METAMATEMATYCZNE KRP

Oczywiście systemy dedukcyjne dla KRP budowane są w taki sposób, żeby wszystkie ich twierdzenia były tautologiami; można więc pokazać, że dla KRP zachodzi: $\vdash A \rightarrow\ \models A$

KRP jest także systemem semantycznie pełnym, tzn., że wszystkie tautologie posiadają dowody:

$$\models A \rightarrow\ \vdash A$$

Twierdzenie o pełności KRP udowodnił po raz pierwszy Kurt Gödel w roku 1930.
KRP jest także systemem niesprzecznym.
Oprócz znanego nam już pojęcia tzw. mocnej zupełności (zupełności w sensie Posta) używa się też innego pojęcia syntaktycznej zupełności:

> Mówimy, że system jest **syntaktycznie zupełny** (w tym drugim sensie), gdy dla każdego zdania, albo ono, albo jego negacja jest twierdzeniem systemu.

KRZ jest zupełny w sensie Posta, lecz nie jest zupełny w tym drugim sensie.
KRP nie jest zupełny ani w jednym, ani w drugim sensie. Dla uzasadnienia tego wystarczy rozważyć np. formułę:

$$\bigvee_x \bigvee_y \sim (x = y)$$

Ani ona, ani jej negacja nie są tautologiami, zatem nie są też twierdzeniami KRP. Z drugiej strony, dodanie takiej niedowodliwej formuły do systemu nie doprowadzi do sprzeczności.
KRP (jako całość) nie jest też rozstrzygalny (twierdzenie Churcha z r. 1936). Istnieją jednak pewne rozstrzygalne fragmenty KRP, np. tzw. monadyczny RP, czyli rachunek, którego język ograniczony jest do formuł zawierających wyłącznie predykaty jednoargumentowe. Efektywną metoda rozstrzygania dla monadycznego RP jest metoda kół Eulera (albo diagramów Venna).
Inne rozstrzygalne fragmenty RP to np. klasa formuł poprzedzonych jedynie kwantyfikatorami ogólnymi – albo jedynie kwantyfikatorami szczegółowymi – albo klasa formuł, w których wszystkie kwantyfikatory ogólne poprzedzają kwantyfikatory szczegółowe.
Podstawowe metatwierdzenie dla KRP to **twierdzenie o dedukcji**:

> Jeśli X jest zbiorem formuł i A jest zdaniem oraz formuła B jest dedukowalna z X i A (tj. daje się udowodnić w oparciu o X i A przy pomocy stosownych reguł inferencyjnych), to wówczas z X można wydedukować implikację $A \rightarrow B$, tzn.:
>
> Jeśli $X, A \vdash B$, to $X \vdash A \rightarrow B$
>
> W szczególnym przypadku, gdy X jest zbiorem pustym, zachodzi:
>
> Jeśli $A \vdash B$, to $\vdash A \rightarrow B$

Twierdzenie o dedukcji mówi, że dla udowodnienia implikacji wystarczy z jej poprzednika wywieść następnik. Dzięki temu właśnie twierdzeniu można w KRP stosować metodę dedukcji naturalnej, czyli założeniową.

Istnieje też tzw. **odwrotne twierdzenie o dedukcji**:

> Jeśli $X \vdash A \rightarrow B$, to $X, A \vdash B$
>
> I w szczególności: Jeśli $\vdash A \rightarrow B$, to $A \vdash B$

To metatwierdzenie z kolei pozwala wprowadzać do systemu wtórne reguły inferencyjne na podstawie udowodnionych twierdzeń.

Język KRP zawiera jedynie zmienne i stałe indywiduowe oraz predykaty o takich właśnie argumentach i kwantyfikatory po takich zmiennych. Tego typu języki nazywa się **językami elementarnymi**, a wyrażone w nich teorie – **teoriami elementarnymi** (przy czym przez teorię rozumiemy ustalony język wraz z określoną aksjomatyką i regułami dedukcji).
Istnieją jednak inne jeszcze typy obiektów, o których mogłyby mówić teorie, zwłaszcza matematyczne: zbiory indywiduów, zbiory zbiorów, relacje między indywiduami, relacje między zbiorami itd. W językach takich bogatszych teorii musiałyby więc występować zmienne wyższych typów (reprezentujące zbiory czy relacje), które mogłyby być argumentami odpowiednich predykatów (wyższego rzędu) i które mogłyby być kwantyfikowane.
Z drugiej jednak strony, zbiory i relacje w pewnym sensie sprowadzają się do predykatów: każdemu predykatowi odpowiada pewien zbiór (tych obiektów, które go spełniają), a każdemu zbiorowi odpowiada pewien predykat (spełniony tylko i wyłącznie przez elementy tego zbioru). Tak więc w takim rozszerzonym rachunku predykatów można nadal mówić tylko o indywiduach i o predykatach, z tym że wprowadzić należy predykaty wyższych rzędów oraz trzeba dopuścić kwantyfikację po predykatach.

Predykaty pierwszego rzędu (n=1) to funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych (czyli te, których argumentami są wyłącznie nazwy indywiduowe).
Predykaty n-tego rzędu (n>1) to funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych i predykatowych, przy czym co najmniej jeden argument musi być predykatem rzędu n–1 i nie ma wśród nich predykatów rzędów wyższych niż n–1.

PRZYKŁADY:

- predykat *są rozłączne*:

$$\mathrm{Rozł}(F,G) \overset{\mathrm{def}}{\leftrightarrow} \sim \bigvee_{x} (F(x) \wedge G(x))$$

- predykat *jest zwrotna*:

$$\mathrm{Zwr}(R) \overset{\mathrm{def}}{\leftrightarrow} \bigwedge_{x} R(x,x)$$

- predykat *jest symetryczna*:

$$\mathrm{Sym}(R) \overset{\mathrm{def}}{\leftrightarrow} \bigwedge_{x,y} (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$

Jak widać, predykaty wyższych rzędów reprezentują własności i relacje innych własności i relacji: predykaty pierwszego rzędu odpowiadają własnościom i relacjom między indywiduami, a predykaty drugiego rzędu to własności i relacje między predykatami pierwszego rzędu itd.

KRP nazywany jest też rachunkiem pierwszego rzędu (albo węższym rachunkiem funkcyjnym) w odróżnieniu od rachunków wyższych rzędów. Ponieważ jest to podstawowy system logiczny, mówi się o nim też klasyczny rachunek logiczny. Jest to po prostu logika w węższym tego słowa znaczeniu.

W KRP można wyrazić wszelkie teorie matematyczne (i nie tylko). Jako przykład omówimy teorię mnogości. Jej twórcą był G. Cantor (lata siedemdziesiąte/ osiemdziesiąte XIX w.). Nie zawierała ona definicji zbioru ani nie wprowadzono tego pojęcia w sposób aksjomatyczny i początkowo rozwijano tę teorię w sposób czysto intuicyjny. Taki sposób okazał się jednak zawodny, gdyż wkrótce pojawiły się na gruncie tej teorii sprzeczności (np. antynomia Russella).

Uściśleniem teorii intuicyjnych są teorie aksjomatyczne (znane już od starożytności – jak teoria Euklidesa). Budując takie teorie ustala się najpierw jej pojęcia pierwotne, czyli niezdefiniowane. Ich podstawowe własności opisuje się w aksjomatach (pewnikach) – jedynych twierdzeniach teorii przyjmowanych bez dowodu. Na gruncie teorii aksjomatycznej operuje się wyłącznie pojęciami pierwotnymi lub zdefiniowanymi przy pomocy pojęć pierwotnych. Za twierdzenia teorii uznaje się zdania, które dają się uzyskać z aksjomatów za pomocą poprawnego rozumowania. Wszelkie własności pojęć danej teorii nie wymienione w aksjomatach wymagają dowodu.

Pierwszą aksjomatykę dla teorii mnogości sformułował w 1904 r. E. Zermelo; była ona później uzupełniana i modyfikowana (A. Fraenkel, J. von Neumann, P. Bernays, K. Gödel). Pojęcia pierwotne to pojęcie zbioru i pojęcie należenia do zbioru (tj. bycia elementem zbioru). A oto aksjomatyka:

(1) Aksjomat równości zbiorów : dwa zbiory są równe, o ile mają te same elementy.
(2) Aksjomat istnienia : istnieje co najmniej jeden zbiór.
(3) Aksjomat pary : dla dowolnych dwóch przedmiotów istnieje zbiór, którego są one jedynymi elementami.
(4) Aksjomat sumy : dla dowolnych dwóch zbiorów istnieje zbiór, do którego należą wyłącznie ich wszystkie elementy.
(5) Aksjomat podzbiorów (wyróżniania) : dla każdego zbioru X i każdej funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ (o zakresie zmienności X) istnieje zbiór złożony wyłącznie z wszystkich tych elementów zbioru X, które spełniają daną funkcję $\varphi(x)$.
(6) Aksjomat zbioru potęgowego : dla każdego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wyłącznie wszystkie podzbiory tego zbioru X.
(7) Aksjomat nieskończoności : istnieje zbiór nieskończony.
(8) Aksjomat wyboru : dla każdej rodziny zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, który z każdym ze zbiorów tej rodziny ma dokładnie jeden wspólny element.
(9) Aksjomat ufundowania (albo regularności) : do każdego niepustego zbioru X należy taki element Y, że żaden element Y nie jest elementem zbioru X.

Ten ostatni aksjomat gwarantuje m.in. to, że nie istnieją zbiory będące własnymi elementami ($X \in X$), czy też zbiory będące elementami swoich elementów ($(X \in Y) \wedge (Y \in X)$), czy ogólnie takie, że $(X_1 \in X_2) \wedge (X_2 \in X_3) \wedge \ldots \wedge (X_n \in X_1)$. Ponieważ aksjomat ten jest niezależny od pozostałych aksjomatów, czasem rozważane są teorie, w których jako aksjomat przyjmuje się jego negację. Występujące w takich teoriach nieufundowane zbiory noszą nazwę hiperzbiorów.

Do wymienionych wyżej należy jeszcze dodać aksjomaty identyczności. Stwierdzają one, że relacja identyczności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a ponadto, że przedmioty identyczne są wzajemnie wymienialne pod predykatami bycia zbiorem i należenia do zbioru (tzn. dla dowolnych dwóch identycznych obiektów jest tak, że jeden z nich jest zbiorem witw, gdy drugi też jest zbiorem, jeden jest elementem danego zbioru witw, gdy drugi jest elementem tegoż zbioru i dowolny przedmiot jest elementem jednego z tych zbiorów witw, gdy jest elementem drugiego z nich).

Rozumowania przeprowadzane w celu udowodnienia twierdzenia, zarówno w teoriach intuicyjnych, jak i aksjomatycznych, formułowane są w języku potocznym i oparte raczej na „zdrowym rozsądku" niż na ustalonym zestawie reguł wnioskowania. Dążąc do uzyskania jeszcze większej ścisłości niż w teoriach aksjomatycznych, matematycy opracowali tzw. teorie sformalizowane. W tego typu teoriach język potoczny zastępowany jest językiem sformalizowanym. W tym celu najpierw ustala się alfabet danego języka (zbiór wszystkich stosowanych symboli), a następnie określa się tzw. reguły formowania, które opisują możliwe sposoby konstruowania formuł, czyli złożonych wyrażeń językowych, którymi jedynie wolno posługiwać się w danej teorii. Alfabet oprócz znanych nam symboli może zawierać tzw. stałe pozalogiczne, (inaczej stałe specyficzne teorii), czyli symbole oznaczające wszystkie pojęcia pierwotne teorii aksjomatycznej, którą formalizujemy.

Z kolei wśród wszystkich formuł języka teorii sformalizowanej wyróżniamy te, które traktujemy jako odpowiedniki jej aksjomatów. Nazywamy je aksjomatami specyficznymi danej teorii. Następnym etapem formalizacji teorii aksjomatycznej jest wybór aksjomatów logicznych (spośród tautologii KRP) i reguł dowodzenia (spośród reguł niezawodnych KRP), które łącznie stanowią aparat logiczny teorii. Na koniec pozostaje sprecyzować intuicyjne pojęcie dowodu, definiując jego odpowiednik na gruncie teorii sformalizowanej, mianowicie tzw. dowód formalny (w znany nam już sposób). Ostatecznie twierdzeniami danej teorii są te jej formuły, dla których istnieje dowód formalny. I w taki oto sposób przechodzimy od tzw. czystej logiki do tzw. logiki stosowanej.

Wrócimy teraz do teorii mnogości i pokażemy jej formalizację.

Alfabet: $\sim \ \wedge \ \vee \ \rightarrow \ \leftrightarrow \ \bigwedge \ \bigvee$

$x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots$

( )

Z – predykat jednoargumentowy (*jest zbiorem*)

$\in$ – predykat dwuargumentowy (*jest elementem*)

= – predykat dwuargumentowy (*jest identyczny*)

Formuły atomowe: Z(x), $x \in y$, x=y

Formuły zdaniowe: formuły atomowe oraz formuły postaci:

$$\sim(A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \rightarrow B), \quad (A \leftrightarrow B), \quad \bigwedge_x A, \quad \bigvee_x A$$

(gdzie A i B to dowolne formuły zdaniowe).

Aksjomaty identyczności:

$$\bigwedge_x (x = x)$$

$$\bigwedge_{x,y} (x = y \ \rightarrow \ y = x)$$

$$\bigwedge_{x,y,z} (x = y \ \wedge \ y = z \ \rightarrow \ x = z)$$

$$\bigwedge_{x,y} (x = y \ \wedge \ Z(x) \ \rightarrow \ Z(y))$$

$$\bigwedge_{x,y,z} (x = y \ \wedge \ x \in z \ \rightarrow \ y \in z)$$

$$\bigwedge_{x,y,z} (x = y \ \wedge \ z \in x \ \rightarrow \ z \in y)$$

Aksjomaty specyficzne (wybrane):

(1) aksjomat ekstensjonalności

$$\bigwedge_{x,y} (Z(x) \wedge \ Z(y) \wedge \bigwedge_{z} (z \in x \leftrightarrow z \in y) \ \rightarrow \ x = y)$$

(3) aksjomat pary

$$\bigwedge_{x,y} \bigvee_{u} (Z(u) \wedge \bigwedge_{z} (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y))$$

(4) aksjomat sumy

$$\bigwedge_{x,y} [Z(x) \wedge \ Z(y) \rightarrow \bigvee_{u} (Z(u) \wedge \bigwedge_{z} (z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z \in y))]$$

itd.

Idea formalizmu w matematyce powstała m.in. w związku z programem Dawida Hilberta (1904), którego myślą przewodnią było zbudowanie teorii sformalizowanej obejmującej całą matematykę i udowodnienie jej niesprzeczności za pomocą elementarnych środków logicznych. Program ten nie przyniósł jednak spodziewanych rezultatów, a przyczyną jego upadku stało się twierdzenie udowodnione przez K. Gödla, głoszące, że:

> Dowód niesprzeczności każdej teorii sformalizowanej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych można przeprowadzić jedynie na gruncie teorii matematycznej obszerniejszej od tej, której niesprzeczność chcemy udowodnić.

Mimo załamania programu Hilberta teorie sformalizowane pozostały ważnym narzędziem badań matematycznych. Z drugiej strony, stanowią też one interesujący obiekt takich badań. Dział matematyki zajmujący się ich badaniem nazywamy metamatematyką, a do jej najważniejszych zagadnień należą problemy niesprzeczności, zupełności i rozstrzygalności teorii.

Twierdzenie Gödla spowodowało, że zamiast dążyć do konstrukcji absolutnych dowodów niesprzeczności ograniczono się do dowodów względnych, polegających na wykazaniu, że dana teoria jest niesprzeczna o ile inna teoria (np. arytmetyka liczb naturalnych) jest niesprzeczna.

Choć wydawałoby się, że arytmetyka liczb naturalnych jest teorią zupełną w tym sensie, że istnieje w niej dowód dla każdego zdania wyrażonego w języku sformalizowanej arytmetyki (lub dla jego negacji), to jednak K. Gödel udowodnił, że każda niesprzeczna teoria sformalizowana zawierająca arytmetykę liczb naturalnych jest niezupełna. I dalej, K. Gödel udowodnił także nierozstrzygalność arytmetyki liczb naturalnych (a więc i wszystkich zawierających ją teorii matematycznych).

Pierwsze aksjomatyczne ujęcie arytmetyki liczb naturalnych zaproponował G. Peano w 1889 r. Oto jego sformalizowana wersja jako teorii elementarnej.

Alfabet: $\sim \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad \bigwedge \quad \bigvee$

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots$

( )

0 – stała nazwowa (*zero*)

S – funktor nazwotwórczy jednoargumentowy (*następnik*)

+ – funktor nazwotwórczy dwuargumentowy (*suma*)

• – funktor nazwotwórczy dwuargumentowy (*iloczyn*)

= – predykat dwuargumentowy (*jest identyczny*)

Termy: zmienne nazwowe, 0, wyrażenia postaci: $S(\alpha)$, $\alpha+\beta$, $\alpha \bullet \beta$ (gdzie α i β to dowolne termy).

Formuły atomowe: $\alpha = \beta$ (gdzie α i β to dowolne termy).

Formuły zdaniowe: formuły atomowe oraz formuły postaci:

$$\sim(A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \rightarrow B), \quad (A \leftrightarrow B), \quad \bigwedge_x A, \quad \bigvee_x A$$

(gdzie A i B to dowolne formuły zdaniowe).

Aksjomaty:

(1) $\bigwedge_{x} (x = x)$

(2) $\bigwedge_{x,y} (x = y \rightarrow y = x)$

(3) $\bigwedge_{x,y,z} (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

(4) $\bigwedge_{x,y} (x = y \rightarrow S(x) = S(y))$

(5) $\bigwedge_{x,y} (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$

(6) $\bigwedge_{x,y,z} (x = y \rightarrow x + z = y + z)$

(7) $\bigwedge_{x,y,z} (x = y \rightarrow z + x = z + y)$

(8) $\bigwedge_{x,y,z} (x = y \rightarrow x \bullet z = y \bullet z)$

(9) $\bigwedge_{x,y,z} (x = y \rightarrow z \bullet x = z \bullet y)$

(10) $\sim \bigvee_{x} (0 = S(x))$

(11) $\bigwedge_{x} (x + 0 = x)$

(12) $\bigwedge_{x,y} (x + S(y) = S(x + y))$

(13) $\bigwedge_{x} (x \bullet 0 = 0)$

(14) $\bigwedge_{x,y} (x \bullet S(y) = (x \bullet y) + x)$

(15) $A(0) \wedge \bigwedge_{x} [A(x) \rightarrow A(S(x))] \rightarrow \bigwedge_{x} A(x)$

(A(0) oznacza A(x/0), A(S(x)) – A(x/S(x)); aksjomat (15) to właściwie schemat nieskończenie wielu aksjomatów; reprezentuje zasadę indukcji matematycznej)