TEORIA MNOGOŚCI

W teorii mnogości (tj. teorii czy rachunku zbiorów) pojęcia podstawowe, czyli **zbiór** i **należenie do zbioru** (albo **bycie elementem zbioru**), są pojęciami pierwotnymi, czyli niedefiniowalnymi, o własnościach scharakteryzowanych przez aksjomaty teorii. Należy zbiory traktować jako twory abstrakcyjne, stanowiące kolekcje określonych rozróżnialnych obiektów. Zbiory są przez nas wyabstrahowane spośród całego uniwersum, poprzez wyodrębnienie w nim pewnych (nieidentycznych) obiektów i traktowanie ich wszystkich łącznie jako odrębnej całości. Obiekty te nazywamy elementami zbioru; mówimy też, że elementy należą do danego zbioru; symbolicznie:

$$a \in B, \quad x \in X$$

$$a \notin B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \sim(a \in B)$$

Zasada ekstensjonalności

Zbiory są identyczne witw, gdy należą do nich dokładnie te same elementy:

$$A = B \leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

A zatem zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy – bo nie ma dwóch różnych zbiorów, które składałyby się z tych samych elementów. Określić zbiór to tyle, co podać, z jakich przedmiotów się on składa. Nieistotne jest więc, jak zbiór określimy, a jedynie – co do niego należy.

ZADANIE 1

Czy zbiory A i B są równe?

(1) A – zbiór wszystkich mieszkańców Warszawy w roku 2000,
B – zbiór wszystkich mieszkańców stolicy Polski w roku 2000.

(2) A – zbiór wszystkich mieszkańców Warszawy w roku 1000,
B – zbiór wszystkich mieszkańców stolicy Polski w roku 1000.

(3) A – zbiór wszystkich dzielnic Warszawy,
B – zbiór wszystkich ulic Warszawy.

(4) A – zbiór wszystkich miast mniej niż 90-milionowych,
B – zbiór wszystkich miast mniej niż 100-milionowych.

(5) A – zbiór prostokątów równobocznych,
B – zbiór kwadratów.

(6) A – zbiór dzielników liczby 4,
B – zbiór trzech liczb: 1, 2 oraz 4.

Metody definiowania zbiorów:

I. Zbiór można określić przez podanie warunku charakteryzującego jego elementy, tj. funkcji zdaniowej spełnionej przez wszystkie i tylko te przedmioty, które należą do tego zbioru (innymi słowy – własności posiadanej przez te i tylko te przedmioty).

$$\{x : P(x)\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : P(x)\} = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge P(x)\}$$

ZADANIE 2
Odczytaj poniższe zapisy:
(1) {x: x jest filozofem}
(2) Platon ∈ {x: x jest filozofem}
(3) {x: x > 0}
(4) $\{x : \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (x = 2n)\}$
(5) {x ∈ ℕ: x jest podzielne przez 2}
(6) {x: x jest rektorem UAM}
(7) Lipowska ∉ {x: x jest rektorem UAM}.

II. Zbiór można też scharakteryzować przez <u>wyliczenie</u> jego elementów (podanie ich listy).

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\} = \{0, 2, 4, \ldots, 10\}$$
$$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$
$$\{3, \text{Kowalski}, \text{Pentagon}, \text{Sybir}, \text{zbiór liczb parzystych}\}$$

Porządek elementów w zbiorze nie odgrywa roli; np.
$$\{0, 7\} = \{7, 0\}$$
(na mocy zasady ekstensjonalności).
Powtarzanie nazwy tego samego elementu w zbiorze również nie zmienia zbioru, np.
$$\{0, 7\} = \{7, 7, 7, 0, 0\}$$
także na mocy zasady ekstensjonalności (zbiór to kolekcja obiektów rozróżnialnych!)[#]
Zbiór jednostkowy (inaczej <u>singleton</u>) to zbiór jednoelementowy. Zbiór jednostkowy jest obiektem różnym od należącego doń elementu:
$\{a\} \neq a$ a także $\{\{a\}\} \neq \{a\}$ itd.
Oczywiście $a \in \{a\}$, $\{a\} \in \{\{a\}\}$ itd.

Z aksjomatów teorii mnogości wynika:

Zasada dystrybutywności
Żaden zbiór nie jest identyczny z żadnym ze swoich elementów:
$$\bigwedge_x \bigwedge_A (x \in A \rightarrow x \neq A)$$

Zbiór pusty (oznaczany $\varnothing$) to zbiór, do którego nie należy żaden element; może być wyznaczony przez dowolny warunek sprzeczny, albo warunek, którego nie spełnia żaden obiekt.

ZADANIE 3
(1) Ile istnieje zbiorów pustych?
(2) Czym różni się $\varnothing$ od zbioru $\{\varnothing\}$?
(3) A zbiór $\{\varnothing\}$ od zbioru $\{\{\varnothing\}\}$?

[#] Rozważa się także kolekcje, w których obiekty mogą występować wielokrotnie – są to tzw. <u>multizbiory</u>

Rodzina zbiorów to zbiór, którego elementami są zbiory.
Kolejne stopnie abstrakcji tworzą więc hierarchię obiektów różnych typów: indywidua – zbiory – rodziny zbiorów itd.
UWAGA: relacja należenia do zbioru (∈) NIE jest przechodnia !

ZADANIE 4
Jakie zależności muszą zachodzić miedzy obiektami a, b, c oraz d, aby zachodziły następujące równości:

(1) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$
(2) $\{a, \{a,b\}\} = \{c, \{c,d\}\}$
(3) $\{\{a,b\}, \{d\}\} = \{\{a\}\}$
(4) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$
(5) $\{\{a,b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$
(6) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$

ZADANIE 5*
Wśród podanych niżej zbiorów A, B, C, D, E wskaż:

(1) zbiór o najmniejszej liczbie elementów,
(2) zbiór o największej liczbie elementów,
(3) zbiory identyczne,
(4) zbiory mające dokładnie jeden element wspólny,
(5) zbiory nie mające żadnego elementu wspólnego.

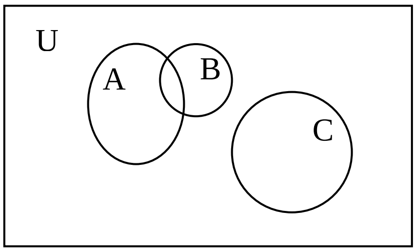
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{2, \{1, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$$
$$C = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$
$$D = \{3, \{2\}, \{\{5\}\}\}$$
$$E = \{\{3-1\}, 3, \{\{3+2\}\}\}$$

ZADANIE 6*
Które z podanych niżej implikacji są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B, C ?

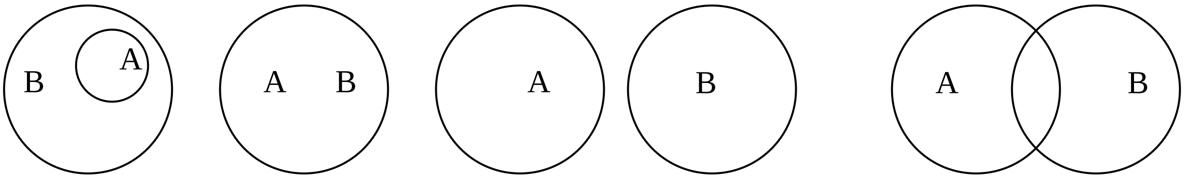
(1) $(A \in B \wedge B \in C) \to A \in C$
(2) $(A \in B \wedge B = C) \to A \in C$
(3) $(A = B \wedge B \in C) \to A \in C$
(4) $(A = B \wedge B = C) \to A = C$
(5) $(A \notin B \wedge B \in C) \to A \notin C$
(6) $(A \notin B \wedge B = C) \to A \notin C$
(7) $(A \in B \wedge B \neq C) \to A \notin C$

RELACJE MIĘDZY ZBIORAMI

Zbiory i relacje, które między nimi zachodzą, można ilustrować geometrycznie: np. ustalony prostokąt reprezentuje uniwersum U, zaś wyróżnione w nim obszary – dowolne zbiory. Ich wzajemne położenie odpowiada relacjom, jakie między nimi zachodzą. Jest to tzw. **metoda kół Eulera**.



O ile nie jest on niezbędny, prostokąt można opuszczać.
Między dwoma dowolnymi zbiorami może zachodzić jedna z czterech poniższych relacji.



1. $A \subset B$ 2. $A = B$ 3. $A)(B$ 4. $A)\!\!\!-\!\!\!(B$

1. **Relacja zawierania się** (<u>inkluzji</u>, <u>bycia podzbiorem</u>)

Zbiór A zawiera się w zbiorze B witw, gdy każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B. $$A \subset B \leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Jeśli $A \subset B$, to A jest <u>podzbiorem</u> zbioru B, a B jest <u>nadzbiorem</u> zbioru A.

$$\varnothing \subset A \qquad A \subset A \qquad A \subset U$$

Relacja zawierania się (inaczej niż relacja należenia) jest przechodnia:

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$$

2. **Relacja identyczności** (<u>równości</u>)

Zbiór A jest równy zbiorowi B witw, gdy do zbioru A należą dokładnie te same elementy, które należą do zbioru B. $$A = B \leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Oczywiście, zbiory równe są wzajemnie swoimi podzbiorami (tzw. <u>podzbiorami niewłaściwymi</u>):

$$A = B \leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

Jeśli natomiast $A \subset B \wedge A \neq B$, to mówimy, że A jest <u>podzbiorem właściwym</u> B; można to zapisywać $A \subsetneq B$.

3. **Relacja rozłączności** (<u>wykluczania się</u>)

Zbiór A jest rozłączny ze zbiorem B witw, gdy żaden element zbioru A nie jest elementem zbioru B. $$A)(B \leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x \notin B)$$

4. **Relacja krzyżowania się**

Zbiory A i B krzyżują się witw, gdy mają pewne elementy wspólne oraz jednocześnie każdy z nich ma elementy nie należące do drugiego.

$$A \,)\!\!-\!\!(\, B \leftrightarrow \bigvee_{x} (x \in A \wedge x \in B) \wedge \bigvee_{x} (x \in A \wedge x \notin B) \wedge \bigvee_{x} (x \notin A \wedge x \in B)$$

ZADANIE 7*

Jakie relacje zachodzą między zbiorami A, B, C, D oraz E?

A = { A.Einstein, zbiór poetów, Paryż }

B = { zbiór fizyków, A.Mickiewicz, Francja }

C = { {A.Einstein}, {A.Mickiewicz}, zbiór stolic europejskich }

D to jest zbiór, którego elementami są: wszyscy poeci, wszyscy uczeni oraz wszystkie miasta europejskie

E = { A.Einstein, Paryż }

ZADANIE 8

Które z podanych relacji są prawdziwe?

(1) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(2) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

(3) $\emptyset \,)(\, \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset = \{\emptyset\}$

(5) $\emptyset \,)\!\!-\!\!(\, \{\emptyset\}$

(6) $\emptyset \in \emptyset$

(7) $\emptyset \subset \emptyset$

(8) $\emptyset \,)(\, \emptyset$

(9) $\emptyset = \emptyset$

(10) $\emptyset \,)\!\!-\!\!(\, \emptyset$

(11) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

(12) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$

(13) $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

ZADANIE 9

(1) Czy jest możliwe, aby zarazem B = A oraz $B \in A$?
(2) Czy istnieje zbiór, który zawiera się sam w sobie?
(3) Czy istnieje zbiór, który jest rozłączny sam ze sobą?
(4) Ile elementów muszą łącznie posiadać zbiory A i B, aby mogły się krzyżować?
(5) Czy jest możliwe, aby jakiś zbiór wykluczał się z innym, a zarazem się w nim zawierał?
(6) Czy jest możliwe, aby jakieś zbiory A i B spełniały warunki: $B \subset A$ oraz $B \in A$ (tj. aby podzbiór zbioru A był jednocześnie jego elementem)?

* Zadanie pochodzi z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.