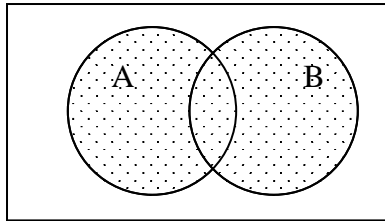


## DZIAŁANIA NA ZBIORACH

**Sumą** (unią) **zbiorów** A i B nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy należące do zbioru A lub do zbioru B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



$$A \cup B \quad \text{[shaded box]}$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \subset A \cup B$$

$$B \subset A \cup B$$

## ZADANIE 1

Wyznacz sumy:  $A \cup A$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cup D$ ,  $A \cup E$ ,  $D \cup E$  dla zbiorów:

A = zbiór parzystych liczb naturalnych

B = zbiór nieparzystych liczb naturalnych

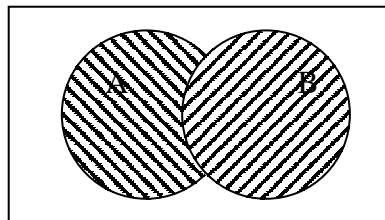
C = zbiór liczb naturalnych większych od 10

D = {4, 6, {8}}

E = {11, {12, 13}}

**Iloczynem** (przekrojem, przecięciem) **zbiorów** A i B nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy należące jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



$$A \cap B \quad \text{[shaded box]}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap B \subset A$$

$$A \cap B \subset B$$

## ZADANIE 2

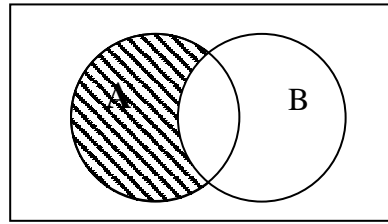
Wyznacz iloczyny:

$A \cap A$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $A \cap D$ ,  $A \cap E$ ,  $C \cap D$ ,  $C \cap E$

dla zbiorów A, B, C, D, E z zadania 1.

**Różnicą** **zbioru A i zbioru B** nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy należące do zbioru A i nie należące do zbioru B.

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



$$A - B \quad \text{[shaded square icon]}$$

$$A - \emptyset = A \quad \emptyset - A = \emptyset \quad A - A = \emptyset \quad A - U = \emptyset \quad U - A = A'$$

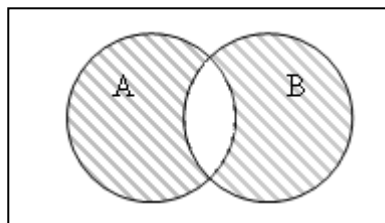
**ZADANIE 3**

Wyznacz różnice:

$A - A, A - B, A - C, A - D, A - E, C - D, C - E, E - C$   
dla zbiorów  $A, B, C, D, E$  z zadania 1.

**Różnicą symetryczną zbiorów  $A$  i  $B$**  nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy należące dokładnie do jednego z tych zbiorów.

$$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$



$$A \div B \quad \text{[shaded square icon]}$$

$$A \div \emptyset = A \quad A \div B = B \div A \quad A \div U = A'$$

$$A \div A = \emptyset \quad A \div B = (A - B) \cup (B - A)$$

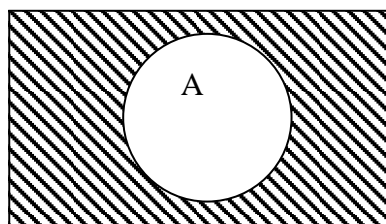
**ZADANIE 4**

Wyznacz różnice symetryczne:

$A \div A, A \div B, A \div C, A \div D, A \div E, C \div D, C \div E$   
dla zbiorów  $A, B, C, D, E$  z zadania 1.

**Dopełnieniem zbioru  $A$**  (do zbioru  $U$ ) nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy uniwersum nie należące do zbioru  $A$ .

$$A' = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$



$$A' \quad \text{[shaded square icon]}$$

$$A' = U - A \quad A'' = A \quad \emptyset' = U \quad U' = \emptyset$$

$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$
$A - B = A \cap B'$	$A - B = B' - A'$
$A \subset B \rightarrow B' \subset A'$	

## ZADANIE 5

Wyznacz dopełnienia zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  z zadania 1 dla  $U = \mathbb{N}$  (tj. gdy uniwersum to zbiór liczb naturalnych).

## ZADANIE 6

Wyznacz dopełnienia:

- (1) Zbioru liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$  w uniwersum liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .
- (2) Zbioru liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$  w uniwersum liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ .
- (3) Zbioru liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$  w uniwersum liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ .
- (4) Zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  w uniwersum liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ .

## ZADANIE 7\*

Niech uniwersum stanowi zbiór  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ . Dla zbiorów  $A = \{a_1, a_2\}$  oraz  $B = \{a_2, a_3\}$  wyznacz następujące zbiory:

- |                  |                   |                |
|------------------|-------------------|----------------|
| (1) $A'$         | (4) $(A \cap B)'$ | (7) $A' - B'$  |
| (2) $B'$         | (5) $A' \cup B'$  | (8) $(A - B)'$ |
| (3) $A' \cap B'$ | (6) $(A \cup B)'$ |                |

## ZADANIE 8\*

Niech uniwersum stanowi zbiór wszystkich ludzi i niech

$A$  = zbiór wszystkich filozofów starożytnych

$B$  = zbiór wszystkich filozofów nowożytnych

$C$  = zbiór wszystkich matematyków

$D = \{\text{Kartezjusz}\}$

Wyznacz następujące zbiory:

- |                     |                           |                           |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| (1) $A \cup B$      | (7) $A - D'$              | (13) $A' \cup C$          |
| (2) $A \cap B'$     | (8) $A' - D$              | (14) $A' \cup C'$         |
| (3) $A' \cap B$     | (9) $A' - D'$             | (15) $(B \cup C)' \cap D$ |
| (4) $A' \cap B'$    | (10) $(A - D)'$           | (16) $(C - D) \cup A'$    |
| (5) $(A' \cap B')'$ | (11) $(A \cap D)' \cup B$ | (17) $(B - A) - D'$       |
| (6) $(A \cap B)'$   | (12) $A \cup C'$          |                           |

## ZADANIE 9\*

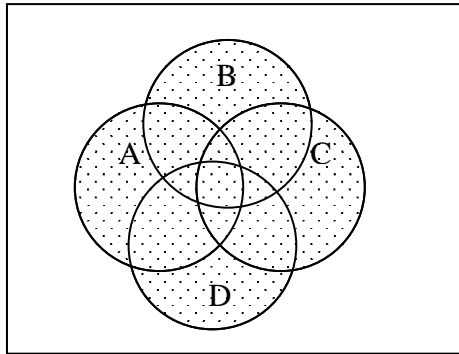
Stosując oznaczenia zbiorów z zadania 8 przedstaw symbolicznie następujące zbiory:

- (1) Zbiór, którego elementami są: wszyscy filozofowie starożytni nie będący matematykami i wszyscy filozofowie nowożytni będący matematykami.
- (2) Zbiór, którego elementami są: wszyscy filozofowie nowożytni będący matematykami, z wyjątkiem Kartezjusza.
- (3) Zbiór, do którego należy Kartezjusz oraz wszyscy matematycy nie będący filozofami starożytnymi ani nowożytnymi.
- (4) Zbiór, do którego należą wszyscy matematycy będący filozofami starożytnymi lub nowożytnymi, z wyjątkiem Kartezjusza.

**Sumą niepustej rodziny zbiorów**  $\mathcal{A}$  nazywamy zbiór wszystkich przedmiotów należących do co najmniej jednego elementu tej rodziny.

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \bigvee_A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$$

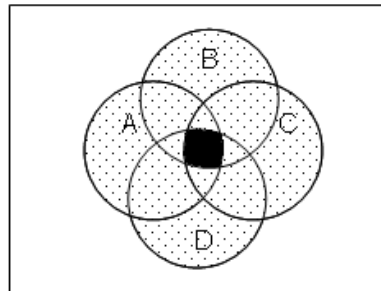
Np. niech  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$



$$\bigcup \mathcal{A} \quad \text{[stippled square]}$$

**Iloczynem niepustej rodziny zbiorów**  $\mathcal{A}$  nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie przedmioty należące do każdego elementu tej rodziny.

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : \bigwedge_A (A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A)\}$$



$$\bigcap \mathcal{A} \quad \text{[solid black square]}$$

Jeśli  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , to  $\bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

Jeśli  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , to  $\bigcap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ .

W szczególności, jeśli  $\mathcal{A} = \{B, C\}$ , to  $\bigcup \mathcal{A} = B \cup C$  oraz  $\bigcap \mathcal{A} = B \cap C$ .

Ponadto, jeśli  $\mathcal{A} = \{B\}$ , to  $\bigcup \mathcal{A} = B$  oraz  $\bigcap \mathcal{A} = B$ .

Jeśli  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  to  $\bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$

Jeśli  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  to  $\bigcap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$

$$(*) \quad \bigwedge_A (A \in \mathcal{A} \rightarrow A \subset \bigcup \mathcal{A})$$

$$(**) \quad \bigwedge_A (A \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcap \mathcal{A} \subset A)$$

Suma rodziny zbiorów to najmniejszy zbiór mający własność (\*), czyli taki, że zawiera w sobie każdy zbiór należący do tej rodziny.

Iloczyn rodziny zbiorów to największy zbiór mający własność (\*\*), czyli taki, że zawiera się w każdym zbiorze należącym do tej rodziny.

## ZADANIE 10

Niech  $\mathcal{A} = \{P, A, N\}$ , gdzie  $P, A, N$  to zbiory ludzi mówiących (odpowiednio) po polsku, po angielsku i po niemiecku. Wyznacz sumę i iloczyn rodziny zbiorów  $\mathcal{A}$ .

## ZADANIE 11

Niech  $\mathcal{B}$  to rodzina narodów (tj. zbiorów ludzi tej samej narodowości). Wyznacz sumę i iloczyn rodziny zbiorów  $\mathcal{B}$ .

## ZADANIE 12\*

Wyznacz sumy i iloczyny podanych niżej rodzin zbiorów.

- (1)  $\mathcal{D} = \{\{1,2,3\}, \{2,4,6\}, \{5,4,3,2\}\}$
- (2)  $\mathcal{E} = \{\{\{1\}, \{2,3\}\}, \{\{2\}, \{1,3\}\}, \{\{3\}, \{1,2\}\}\}$
- (3)  $\mathcal{F} = \{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots\}$ , gdzie  $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$
- (4)  $\mathcal{G} = \{\{i\}, i \in \mathbb{N}\}$
- (5)  $\mathcal{H} = \{\{i, j\}, i, j \in \mathbb{N}\}$
- (6)  $\mathcal{K} = \{\{\{i\}\}, i \in \mathbb{N}\}$
- (7)  $\cup \mathcal{K}$

**Zbiorem potęgowym** zbioru  $A$  nazywamy rodzinę wszystkich jego podzbiorów.

$$2^A = \{X : X \subset A\}$$

## ZADANIE 13

Wyznacz zbiory potęgowe podanych niżej zbiorów:

- (1)  $A = \emptyset$
- (2)  $B = \{a\}$
- (3)  $C = \{a, b\}$
- (4)  $D = \{a, b, c\}$
- (5)  $E = \{\emptyset\}$
- (6)  $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$\emptyset \in 2^A$$

$$A \in 2^A$$

$$\cup 2^A = A$$

$$A \subset B \rightarrow 2^A \subset 2^B$$

## ZADANIE 14

Ile podzbiorów ma zbiór  $n$ -elementowy?

\* Zadanie (lub jego część) pochodzi z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.