Ciałem zbiorów (lub **algebrą zbiorów**) zawartych w niepustym zbiorze U nazywamy każdą niepustą rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A}$ spełniającą następujące warunki:

(i) $\bigwedge_{X} (X \in \mathcal{A} \to X' \in \mathcal{A})$

(ii) $\bigwedge_{X} \bigwedge_{Y} (X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{A} \to X \cup Y \in \mathcal{A})$

Mówimy też, że ciało zbiorów to rodzina zbiorów zamknięta względem operacji dopełnienia i sumy zbiorów.

ZADANIE 1

Pokaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów w U, zaś X i Y należą do rodziny $\mathcal{A}$ to:

(1) $\mathrm{U} \in \mathcal{A}$
(2) $\varnothing \in \mathcal{A}$
(3) $X \cap Y \in \mathcal{A}$
(4) $X - Y \in \mathcal{A}$
(5) $X \div Y \in \mathcal{A}$

WNIOSEK

Ciało zbiorów jest również zamknięte względem operacji iloczynu, różnicy i różnicy symetrycznej zbiorów.

PRZYKŁADY

(1) $\{\varnothing, A\}$ jest ciałem zbiorów zawartych w zbiorze A.
(2) $\{\varnothing, X, X - A, A\}$, gdzie X jest dowolnym podzbiorem A, jest ciałem zbiorów zawartych w zbiorze A.
(3) Zbiór potęgowy 2^{A} jest ciałem zbiorów zawartych w zbiorze A.
(4) $\{\varnothing, \mathbb{Q}, \mathbb{IQ}, \mathbb{R}\}$, jest ciałem zbiorów zawartych w zbiorze $\mathbb{R}$ (gdzie $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{IQ}$ – zbiór liczb niewymiernych, $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych).

Podziałem niepustego zbioru A nazywamy rodzinę $\mathcal{A}$ jego podzbiorów, które są niepuste, parami rozłączne i wyczerpują łącznie zbiór A, tzn. spełniają następujące warunki:

(i) $\bigwedge_{X} (X \in \mathcal{A} \to X \neq \varnothing)$

(ii) $\bigwedge_{X} \bigwedge_{Y} (X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{A} \wedge X \neq Y \to X \cap Y = \varnothing)$

(iii) $\bigcup \mathcal{A} = A$

Elementy podziału nazywamy <u>blokami podziału</u>. Każdy element zbioru wyjściowego musi należeć do jakiegoś bloku podziału (warunek (iii)) i tylko do jednego bloku (warunek (ii)); w każdym bloku musi być co najmniej jeden element zbioru (warunek (i)).

ZADANIE 2
Sprawdź, czy podane niżej rodziny zbiorów stanowią podziały zbioru ludzi:

(1) $\mathcal{A} = \{P, N\}$, gdzie P – zbiór ludzi pracujących, N – zbiór ludzi niepracujących.

(2) $\mathcal{B} = \{F, U, E\}$, gdzie F – zbiór ludzi pracujących fizycznie, U – zbiór ludzi pracujących umysłowo, E – zbiór emerytów.

ZADANIE 3
Sprawdź, czy podane niżej rodziny zbiorów stanowią podziały zbioru liczb rzeczywistych:

(1) $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \{0\}\}$, gdzie $\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{R}_-$ – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

(2) $\mathcal{D} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{IQ}\}$, gdzie $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{IQ}$ – zbiór liczb niewymiernych.

ZADANIE 4*
Niech $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Która z podanych niżej rodzin zbiorów jest podziałem zbioru A?

(1) $\mathcal{A}_1 = \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}\}$

(2) $\mathcal{A}_2 = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4\}\}$

(3) $\mathcal{A}_3 = \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$

(4) $\mathcal{A}_4 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\}$

(5) $\mathcal{A}_5 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_4\}, \{a_2\}\}$

(6) $\mathcal{A}_6 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \varnothing\}$

ZADANIE 5
Sprawdź, czy podane niżej rodziny zbiorów stanowią podziały zbioru ludzi:

(1) $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, gdzie $A, B, \ldots, G$ to odpowiednio zbiory ludzi urodzonych w poniedziałek, we wtorek, …, w niedzielę.

(2) $\mathcal{F} = \{A, B, C, M, W\}$, gdzie A – zbiór ateistów, B – zbiór buddystów, C – zbiór chrześcijan, M – zbiór mahometan, W – zbiór ludzi wyznania mojżeszowego.

ZADANIE 6
Sprawdź, czy podane niżej rodziny zbiorów stanowią podziały zbioru prawników:

(1) $\mathcal{G} = \{P, N\}$, gdzie P – zbiór prokuratorów, N – zbiór prawników nie będących prokuratorami.

(2) $\mathcal{H} = \{P, A\}$, gdzie P – zbiór prokuratorów, N – zbiór adwokatów.

ZADANIE 6
Czy rodzina zbiorów $\mathcal{K} = \{$zbiór książek polskich, zbiór książek oprawnych$\}$ stanowi podział zbioru książek?

ZADANIE 7
Czy rodzina zbiorów $\mathcal{M} = \{$zbiór mężczyzn studiujących na UAM, zbiór studentów I roku, zbiór kobiet studiujących na UAM, zbiór studentów prawa$\}$ stanowi podział zbioru studentów UAM?

ZADANIE 8*
Która z podanych niżej rodzin zbiorów jest podziałem zbioru wszystkich ludzi?

(1) $\mathcal{N}_1 = \{$zbiór ludzi, którzy żyli w XIX w., zbiór ludzi, których przodkowie żyli w XIX w., zbiór ludzi, których potomkowie żyli w XIX w.$\}$

(2) $\mathcal{N}_2 = \{$zbiór osób, które znają co najmniej dwa języki, zbiór osób, które znają co najwyżej jeden język$\}$

(3) $\mathcal{N}_3 = \{$zbiór osób, które znają co najwyżej dwa języki, zbiór osób, które znają co najmniej jeden język$\}$

Skrzyżowaniem podziałów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ (tego samego zbioru) nazywamy rodzinę zbiorów, której elementami są wszystkie iloczyny bloków podziału $\mathcal{A}$ przez bloki podziału $\mathcal{B}$, czyli rodzinę $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ spełniającą warunki:

(1) $\bigwedge_X \bigwedge_Y (X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{B} \rightarrow X \cap Y \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$

(2) $\bigwedge_Z \left(Z \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \rightarrow \bigvee_X \bigvee_Y (X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{B} \wedge Z = X \cap Y\right)$

PRZYKŁAD 1
Jeśli dane są dwa następujące podziały zbioru ludzi:

$\mathcal{A}$ = {K, M}, gdzie K – zbiór kobiet, M – zbiór mężczyzn,
$\mathcal{B}$ = {P, N}, gdzie P – zbiór ludzi pracujących, N – zbiór ludzi niepracujących,

to ich skrzyżowaniem jest rodzina zbiorów:

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{K \cap P, K \cap N, M \cap P, M \cap N\} =$
{ zbiór kobiet pracujących, zbiór kobiet niepracujących,
zbiór mężczyzn pracujących, zbiór mężczyzn niepracujących }

ZADANIE 9
Niech X będzie zbiorem pięcioelementowym: $X=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.
Dla poniższych podziałów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, i $\mathcal{C}$ tego zbioru wyznacz ich skrzyżowania: $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$ oraz $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

$\mathcal{A} = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{B} = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{C} = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4, a_5\}\}$

Które z wyznaczonych skrzyżowań stanowią podział zbioru X?

Dwa podziały danego zbioru X, których skrzyżowanie jest również podziałem tego zbioru X, nazywamy **podziałami niezależnymi**.

PRZYKŁAD 2

(a) Podziały $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zbioru ludzi z przykładu 1 są niezależne.
(b) Dwa następujące podziały zbioru ludzi:

$\mathcal{D}$ = {zbiór studentów, zbiór „nie-studentów”}
$\mathcal{E}$ = {zbiór niemowląt, zbiór „nie-niemowląt”}

nie są niezależne.

ZADANIE 10

Dane są dwa następujące podziały zbioru ludzi:

$\mathcal{F}$ = {zbiór dziewczynek, zbiór chłopców, zbiór kobiet, zbiór mężczyzn}

$\mathcal{G}$ = {A, B, …, Ż}, gdzie zbiory A, B, …, Ż to zbiory ludzi, których nazwiska zaczynają się na daną literę alfabetu.

Czy podziały $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ są niezależne?

Jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są podziałami tego samego zbioru oraz każdy blok podziału $\mathcal{B}$ jest sumą pewnej liczby bloków podziału $\mathcal{A}$, to podział $\mathcal{A}$ nazywamy **rozdrobnieniem podziału** $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$).

ZADANIE 11

Niech X = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Dane są następujące podziały zbioru X:

$\mathcal{A}$ = {{1}, {3}, {2, 5}, {4, 6}}
$\mathcal{B}$ = {{1, 2, 3, 5}, {4, 6}}
$\mathcal{C}$ = {{1, 3}, {2, 4, 5, 6}}
$\mathcal{D}$ = {{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}}
$\mathcal{E}$ = {{1, 2, 3, 4, 5, 6}}

Podaj pary podziałów takie, że pierwszy podział jest rozdrobnieniem drugiego.

PRZYKŁAD 3

Skrzyżowanie podziałów $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ z przykładu 1 jest rozdrobnieniem każdego z podziałów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}\oplus\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ bo $K = (K\cap P) \cup (K\cap N)$ oraz $M = (M\cap P) \cup (M\cap N)$
$\mathcal{A}\oplus\mathcal{B} \leq \mathcal{B}$ bo $P = (K\cap P) \cup (M\cap P)$ oraz $N = (K\cap N) \cup (M\cap N)$

WNIOSEK

Skrzyżowanie dwóch podziałów niezależnych jest zawsze rozdrobnieniem każdego z tych podziałów.

ZADANIE 12

Czy dany podział i jego rozdrobnienie są podziałami niezależnymi? (Sprawdź na poprzednim przykładzie.)

* Zadanie pochodzi z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.