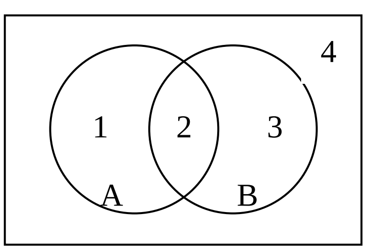
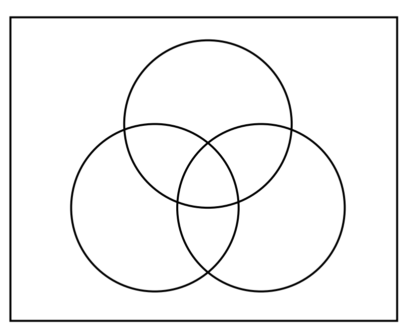
Prawa rachunku zbiorów to takie wyrażenia języka tego rachunku, które stają się zdaniami prawdziwymi przy każdym podstawieniu nazw zbiorów za zmienne.

PRAWA RACHUNKU ZBIORÓW

LP	PRAWO	NAZWA
1	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ $A \div B = B \div A$	Prawa przemienności sumy zbiorów, iloczynu zbiorów, różnicy symetrycznej zbiorów
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Prawa łączności sumy zbiorów, iloczynu zbiorów
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Prawa rozdzielności: sumy względem iloczynu zbiorów iloczynu względem sumy zbiorów
4	$A \cup \varnothing = A$ $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$ $\quad A \cap U = A$	Prawa identyczności
5	$A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$	Prawa idempotentności
6	$A'' = A$	Prawo podwójnego dopełnienia
7	$A \cup A' = U$ $\quad A \cap A' = \varnothing$ $U' = \varnothing$ $\quad \varnothing' = U$	Prawa Boole'a
8	$A \cap B \subset A$ $\quad A \subset A \cup B$ $A \cap B \subset B$ $\quad B \subset A \cup B$	
9	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	Prawa de Morgana
10	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Prawa pochłaniania
11	$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$ $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$ $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = U$ $A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \varnothing$	

Diagramy Venna to nieco inna niż koła Eulera reprezentacja graficzna zbiorów i relacji między nimi. Kontury odpowiadające poszczególnym zbiorom zawsze się przecinają (każdy z każdym), a powstałe w ten sposób obszary odpowiadają wszystkim możliwym kombinacjom należenia i nie-należenia do poszczególnych zbiorów.





W obszarze 1 są elementy należące do zbioru A, lecz nie należące do zbioru B, w obszarze 2 – elementy należące zarazem do A i do B, w obszarze 3 – elementy należące do zbioru B, lecz nie należące do zbioru A i wreszcie w obszarze 4 – elementy nie należące ani do zbioru A, ani do B.

Identyczność dwóch zbiorów określonych przez dowolne działania na zbiorach można pokazać na diagramach Venna cieniując na nich odpowiednie obszary.

ZADANIE 1*

Sprawdź na diagramach Venna, które z poniższych równości stanowią twierdzenia rachunku zbiorów:

(1) $(A-B)\cup B = A\cup B$
(2) $A-A\cap B = A-B$
(3) $(A\cup B)-B = A$
(4) $(A\cup B)-B = A-B$
(5) $A\cup(A\cap B) = A$
(6) $A\cup(A\cup B) = A\cup B$
(7) $A-B = B-A$
(8) $A-(A-B) = A\cap B$
(9) $A-(B-C) = (A-B)-C$
(10) $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$
(11) $A\cup(B-C) = (A\cup B)-(A\cup C)$
(12) $A-(B\cup C) = (A-B) \cup (A-C)$
(13) $A-(B\cap C) = (A-B) \cap (A-C)$
(14) $(A\cup B)' = A'\cup B'$
(15) $(A\cap B)' = A'\cap B'$
(16) $(A-B)' = A'-B'$
(17) $(A-B)' = A'\cup (A\cap B)$
(18) $A'-B' = B-A$
(19) $(A\cup B)-C = (A-C) \cup (B-C)$
(20) $(A\cap B)-C = (A-C) \cap (B-C)$

Dla zilustrowania na diagramach Venna relacji miedzy zbiorami przyjmujemy zasadę, że obszary puste oznaczamy symbolem **–** , a niepuste symbolem **+** .

ZADANIE 2

Zaznacz na diagramach Venna zachodzenie następujących relacji:

(1) $A\subset B$
(2) $A\subsetneq B$
(3) $B\subset A$
(4) $B\subsetneq A$
(5) $A = B$
(6) $A = B = \varnothing$
(7) $A\ )(\ B$
(8) $A \between B$

ZADANIE 3

Sprawdź na diagramach Venna, które z poniższych równoważności stanowią twierdzenia rachunku zbiorów:

(1) $A = B \leftrightarrow A\div B = \varnothing$
(2) $A\subset B \leftrightarrow A-B = \varnothing$
(3) $A\subset B \wedge A \neq B \leftrightarrow A-B = \varnothing \wedge B-A \neq \varnothing$
(4) $A\ )(\ B \leftrightarrow A-B = A \wedge B-A = B$
(5) $A \between B \leftrightarrow A\cap B \neq A \wedge A\cap B \neq B \wedge A\cap B \neq \varnothing$
(6) $A\subset B \leftrightarrow A\cap B = A$
(7) $A\subset B \leftrightarrow A\cup B = B$
(8) $A\subset B \leftrightarrow A\div B = B-A$

(9) $A = B \leftrightarrow A \cup B = A \cap B$
(10) $A\ )(\ B \leftrightarrow A \div B = A \cup B$
(11) $A\ )\!-\!(\ B \leftrightarrow A - B \neq \emptyset \wedge A \cap B \neq \emptyset \wedge B - A \neq \emptyset$

ZADANIE 4*

Sprawdź na diagramach Venna, które z poniższych implikacji stanowią twierdzenia rachunku zbiorów:

(1) $(A \cap C' = \emptyset \wedge B \cap A \neq \emptyset) \rightarrow B \cap C \neq \emptyset$
(2) $(A \cap C = \emptyset \wedge B \cap A \neq \emptyset) \rightarrow B \cap C' \neq \emptyset$
(3) $(A - B = \emptyset \wedge C - B = \emptyset) \rightarrow A - C = \emptyset$
(4) $(A - B = \emptyset \wedge C - B \neq \emptyset) \rightarrow C - A \neq \emptyset$
(5) $(A \cup B \neq \emptyset \wedge B \cup C \neq \emptyset) \rightarrow A \cup C \neq \emptyset$
(6) $(A \cap B \subset C' \wedge A \cup C \subset B) \rightarrow A \cap C = \emptyset$
(7) $[A \subset (B \cup C)' \wedge B \subset (A \cup C)'] \rightarrow B = \emptyset$

Zdania kategoryczne to zdania o strukturze:

Każde S *jest* P.	(ogólnotwierdzące)
Żadne S *nie jest* P.	(ogólnoprzeczące)
Niektóre S *są* P.	(szczegółowotwierdzące)
Niektóre S *nie są* P.	(szczegółowoprzeczące)

Występujące w tych schematach zmienne nazwowe S i P, jak i nazwy, które się za nie podstawia, przyjęto nazywać **terminami.**

Za zdania kategoryczne uważa się też wszystkie dopuszczalne warianty powyższych zdań, jak np.:

Wszystkie S *są* P.
Nie istnieje S, *które jest* P.
Pewne S *są* P.
Istnieje S, *który jest* P.
Pewne S *nie są* P.
Istnieją S, *które nie są* P.

Zdania tego typu łatwo jest (ustalając uniwersum) tłumaczyć na zdania o odpowiednich zbiorach przedmiotów, np. zdaniu

Każda kobieta jest człowiekiem.

odpowiada zdanie

Zbiór kobiet zawiera się w zbiorze ludzi.

które możemy zapisać symbolicznie: $K \subset L$

Odpowiadają mu też inne zdania, równoważne poprzedniemu (por. prawa rachunku zdań – punkt 11), np.:

Suma zbioru kobiet i zbioru ludzi jest równa zbiorowi ludzi. $K \cup L = L$
Iloczyn zbioru kobiet i zbioru ludzi jest równy zbiorowi kobiet. $K \cap L = K$
Iloczyn zbioru kobiet i dopełnienia zbioru ludzi jest zbiorem pustym. $K \cap L' = \emptyset$

Podobnie pozostałe typy zdań kategorycznych możemy reprezentować przez odpowiadające im formuły języka rachunku zbiorów, np.:

Żadna kobieta nie jest mężczyzną. $K \cap M = \emptyset$, $K \subset M'$
Niektóre kobiety są blondynkami. $K \cap B \neq \emptyset$

Niektóre kobiety nie są blondynkami. $K \cap B' \neq \emptyset$, $K - B \neq \emptyset$

ZADANIE 5*

Przyjmując oznaczenia:

S – zbiór studentów
P – zbiór ludzi pracujących zawodowo
D – zbiór słuchaczy studiów dziennych
W – zbiór słuchaczy studiów wieczorowych
Z – zbiór osób studiujących zaocznie
U – zbiór osób uprawiających sport

zapisz w języku teorii zbiorów podane niżej zdania:

(1) Niektórzy studenci pracują zawodowo.
(2) Żaden człowiek pracujący zawodowo nie jest słuchaczem studiów dziennych.
(3) Każdy student jest słuchaczem studiów dziennych lub wieczorowych, albo osobą studiującą zaocznie.
(4) Każdy, kto jest słuchaczem studiów wieczorowych lub studiuje zaocznie, jest człowiekiem pracującym zawodowo.
(5) Niektóre osoby uprawiające sport nie są ani studentami, ani ludźmi pracującymi zawodowo.
(6) Nikt, kto studiuje i pracuje zawodowo, nie uprawia sportu.
(7) Ci studenci, którzy studiują wieczorowo lub zaocznie, nie uprawiają sportu.

Sylogizm to wnioskowanie o dwu przesłankach, w którym zarówno przesłanki jak i wniosek są zdaniami kategorycznymi, przy czym przesłanki mają jeden termin wspólny, a dwa ich pozostałe terminy występują we wniosku.

Formułując przesłanki i wniosek sylogizmu jako zdania o odpowiednich zbiorach, możemy sprawdzić za pomocą diagramów Venna, czy sylogizm ten jest poprawny (niezawodny).

ZADANIE 6*

Zbadaj (w opisany wyżej sposób) niezawodność następujących sylogizmów:

(1) Każdy uczony jest racjonalistą.
Każdy racjonalista jest zwolennikiem metod empirycznych.
―――――
Każdy uczony jest zwolennikiem metod empirycznych.

(2) Nie każdy sławny aktor jest dobrym aktorem.
Każdy dobry aktor jest artystą.
―――――
Nie każdy sławny aktor jest artystą.

(3) Żaden młody człowiek nie jest człowiekiem doświadczonym.
Każdy człowiek doświadczony jest realistą.
―――――
Żaden młody człowiek nie jest realistą.

(4) Nie każde kłamstwo jest złem.
Każde oszustwo jest złem.

Nie każde kłamstwo jest oszustwem.

(5) Żadne twierdzenie metafizyczne nie jest sprawdzalne.
Niektóre twierdzenia filozofii są twierdzeniami metafizycznymi.

Niektóre twierdzenia filozofii są niesprawdzalne.

* Zadanie pochodzi z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.