RELACJE

Niech X i Y są dowolnymi zbiorami. Układ ich elementów, oznaczony symbolem $\langle x,y \rangle$ (lub też (x,y)), gdzie $x \in X$ i $y \in Y$, nazywamy **parą uporządkowaną** o **poprzedniku** x i **następniku** y.

$\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$ (o ile tylko $b \neq a$)

$\langle b,a \rangle \neq \langle b,a,a \rangle$

Dwie pary uporządkowane są identyczne witw, gdy ich poprzedniki są identyczne i ich następniki są identyczne, tj.:

$$\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

Iloczynem (**produktem**) **kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, których poprzedniki należą do zbioru A, zaś następniki należą do zbioru B

$$A \times B = \{ \langle x,y \rangle : x \in A \wedge y \in B \}$$

Np. niech $A = \{a,b,\ldots,h\}$ oraz $B = \{1,2,\ldots,8\}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & \langle a,1 \rangle, \langle a,2 \rangle, \ldots, \langle a,8 \rangle, \\ & \langle b,1 \rangle, \langle b,2 \rangle, \ldots, \langle b,8 \rangle, \\ & \ldots\ldots\ldots, \\ & \langle h,1 \rangle, \langle h,2 \rangle, \ldots, \langle h,8 \rangle \} \end{aligned}$$

Kwadratem zbioru A nazywamy iloczyn kartezjański zbioru A przez ten sam zbiór:

$$A^2 = A \times A$$

PRZYKŁADY

(1) Niech $A = \{a,b\}$. Wtedy $A^2 = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle\}$.

(2) Niech L to zbiór ludzi, a $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych. Wtedy L^2 to zbiór wszystkich możliwych par ludzi, a $\mathbb{R}^2$ **-** to zbiór wszystkich możliwych par liczb rzeczywistych.

Analogicznie do par uporządkowanych definiuje się trójki, czwórki, …, n-tki uporządkowane, a także n-krotne iloczyny kartezjańskie czy n-te potęgi zbioru.

ZADANIE 1

Wyznacz kwadrat zbioru $B = \{1,2,3\}$.

WŁASNOŚCI iloczynu kartezjańskiego:

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	rozdzielność względem iloczynu
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	rozdzielność względem sumy
$A \subset C \wedge B \subset D \rightarrow A \times B \subset C \times D$	

Relacją binarną (**dwuargumentową**) R między elementami zbioru A i zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$:

$$R \subset A \times B$$

Relację nazywamy **określoną w zbiorze** A, jeśli $R \subset A^2$.

PRZYKŁADY

(1) Relacja bycia ojcem (określona w zbiorze ludzi) to zbiór wszystkich par ludzi (par uporządkowanych) postaci $\langle$ojciec, jego dziecko$\rangle$, czyli zbiór O, taki że

$$O \subset L^2 \quad \text{i} \quad O = \{\langle x,y\rangle\colon\ x \text{ jest ojcem } y \text{ oraz } x \text{ i } y \text{ są ludźmi}\}$$

(2) Relacja mniejszości M określona w zbiorze liczb naturalnych

$$M \subset \mathbb{N}^2 \quad \text{i} \quad M = \{\langle x,y\rangle\colon\ x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x < y\}$$

(3) Relacja W „bycia w wieku … lat”

$$W \subset L \times \mathbb{N} \quad \text{i} \quad W = \{\langle x,y\rangle\colon\ x \in L \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \text{ jest w wieku } y \text{ lat}\}$$

Odpowiednio relacje n-argumentowe to zbiory uporządkowanych n-tek.
Jeśli relacja R zachodzi między elementami x oraz y, tzn. $\langle \mathbf{x,y} \rangle \in \mathbf{R}$, to zapisujemy to również krócej: $\mathbf{R(x,y)}$ lub $\mathbf{xRy}$.

Relacja pełna to relacja, która zachodzi między każdym elementem zbioru A i każdym elementem zbioru B:

$$R = A \times B$$

Np. relacja posiadania wspólnego podzielnika określona w zbiorze liczb parzystych jest pełna.

Relacja pusta to relacja, która nie zachodzi między żadnym elementem zbioru A i żadnym elementem zbioru B:

$$R = \varnothing$$

Np. relacja bycia o rok starszym określona w dowolnym zbiorze rówieśników jest pusta. Relacja bycia kwadratem określona w zbiorze liczb ujemnych jest pusta.

Niech dane będą relacja R określona w zbiorze A ($R \subset A^2$) oraz podzbiór X zbioru A ($X \subset A$).
Podzbiór relacji R, taki że poprzedniki i następniki wszystkich par z tego podzbioru należą do zbioru X nazywamy relacją R **ograniczoną** do zbioru X i oznaczamy $R|X$.

$$R|X = R \cap X^2$$

Innymi słowy, $R|X$ to zbiór wszystkich par z relacji R utworzonych z elementów zbioru X:

$$R|X = \{\ \langle a,b\rangle\colon aRb \wedge a \in X \wedge b \in X\ \}$$

Jest to więc relacja R określona w zbiorze X.

Np. relacja mniejszości M (określona w zbiorze liczb rzeczywistych) ograniczona do zbioru $X = \{1,2,3\}$ to relacja $M|X = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$.

Relacja niepusta określona w danym zbiorze po ograniczeniu jej do pewnego podzbioru może stać się relacją pustą. Np. relacja bycia podzielnikiem określona w zbiorze liczb naturalnych po ograniczeniu do zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ staje się relacją pustą.

Dziedziną relacji $R \subset A \times B$ nazywamy zbiór wszystkich poprzedników par uporządkowanych należących do relacji R:

$$D(R) = \{x \in A : \bigvee_{y \in B} xRy\}$$

Przeciwdziedziną relacji $R \subset A \times B$ nazywamy zbiór wszystkich następników par uporządkowanych należących do relacji R:

$$\breve{D}(R) = \{y \in B : \bigvee_{x \in A} xRy\}$$

Polem relacji $R \subset A \times B$ nazywamy sumę jej dziedziny i przeciwdziedziny:

$$P(R) = D(R) \cup \breve{D}(R)$$

Np. dla relacji bycia mężem dziedziną jest zbiór żonatych mężczyzn, przeciwdziedziną – zbiór zamężnych kobiet, a polem tej relacji jest zbiór wszystkich osób będących w związku małżeńskim.

ZADANIE 2

(1) Określ dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole relacji S bycia stolicą państwa:

$$S = \{\langle x,y\rangle : x \text{ jest stolicą państwa } y\}.$$

(2) Określ dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole relacji C bycia córką.

(3) Określ relację D bycia dwukrotnością ograniczoną do zbioru

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Określ dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole tej relacji.

(4) Określ dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole relacji M mniejszości ograniczonej do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Obrazem zbioru $X \subset A$ w relacji $R \subset A \times B$ nazywamy zbiór następników, z którymi elementy zbioru X są w tej relacji:

$$R(X) = \{y \in B : \bigvee_{x \in X} xRy\}$$

Przeciwobrazem zbioru $Y \subset B$ w relacji $R \subset A \times B$ nazywamy zbiór poprzedników, które są w tej relacji z elementami zbioru Y:

$$\breve{R}(Y) = \{x \in A : \bigvee_{y \in Y} xRy\}$$

Np. dla relacji bycia kompozytorem utworu muzycznego, obrazem zbioru {Szopen, Rubik} jest zbiór wszystkich kompozycji Szopena i Rubika, zaś przeciwobrazem zbioru symfonii jest zbiór tych kompozytorów, którzy są autorami symfonii.

WŁASNOŚCI obrazu i przeciwobrazu
Dla dowolnej relacji R zachodzi zawsze, że:

$R(X) \subset \breve{D}(R)$	$\breve{R}(Y) \subset D(R)$
$R(D(R)) = \breve{D}(R)$	$\breve{R}(\breve{D}(R)) = D(R)$
$R(\varnothing) = \varnothing$	$\breve{R}(\varnothing) = \varnothing$
$X)(D(R) \leftrightarrow R(X) = \varnothing$	$Y)(\breve{D}(R) \leftrightarrow \breve{R}(Y) = \varnothing$
$A \subset B \rightarrow R(A) \subset R(B)$	$A \subset B \rightarrow \breve{R}(A) \subset \breve{R}(B)$
$R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$	$\breve{R}(A \cup B) = \breve{R}(A) \cup \breve{R}(B)$

ZADANIE 3

(1) Dana jest relacja $R \subset \mathbb{N}^2$ taka, że: $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. Jaka to relacja? Niech $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $Z = \{1,2\}$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy tych trzech zbiorów.

(2) Wyznacz obrazy i przeciwobrazy podanych niżej zbiorów w określonych relacjach:
- (a) zbiór sportowców – relacja bycia żoną,
- (b) zbiór studentów – relacja bycia dzieckiem,
- (c) zbiór robotników – relacja bycia rodzicem,
- (d) zbiór pierwszych dziesięciu liczb naturalnych – relacja bycia kwadratem określona w zbiorze liczb rzeczywistych,
- (e) zbiór pierwszych dziesięciu liczb naturalnych – relacja bycia kwadratem ograniczona do zbioru liczb naturalnych,
- (f) zbiór pierwszych dziesięciu liczb naturalnych – relacja bycia dwukrotnością.

(3) Dany jest zbiór $U = \{a,b,c,d,e\}$ i jego podzbiory $X = \{a,b\}$ oraz $Y = \{b,c,d\}$. Dane są relacje R i S określone w zbiorze U (tzn. $R \subset U^2$ i $S \subset U^2$), takie że:

$$R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle d,e\rangle\}$$

$$S = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,a\rangle\}$$

Wyznacz obrazy i przeciwobrazy zbiorów X oraz Y w relacjach R oraz S.

(4) Wyznacz obrazy i przeciwobrazy podanych niżej zbiorów w relacji przynależności do tej samej organizacji:
- (a) zbiór osób nie należących do żadnej organizacji,
- (b) zbiór osób należących tylko i wyłącznie do Samoobrony,
- (c) zbiór osób, z których niektóre należą wyłącznie do Samoobrony, a pozostałe nie należą do żadnej organizacji,
- (d) zbiór członków Samoobrony.

ZALEŻNOŚCI MIĘDZY RELACJAMI

Ponieważ relacje są zbiorami par, mogą one pozostawać do siebie w odpowiednich stosunkach: równości, zawierania, rozłączności lub wykluczania. Zależności te są zdefiniowane tak samo, jak w przypadku zwykłych zbiorów.

Relacje R i S są **identyczne** (**równe**) witw, gdy:
dowolne dwa przedmioty są ze sobą w relacji R witw, gdy są ze sobą w relacji S.

$$R = S \leftrightarrow \bigwedge_{x,y} (xRy \leftrightarrow xSy)$$

Np. relacja bycia rodzeństwem (naturalnym, nie przyrodnim) jest identyczna z relacją posiadania tych samych rodziców.

Relacja R **zawiera się** w relacji S witw, gdy każde dwa przedmioty będące ze sobą w relacji R są też w relacji S:

$$R \subset S \leftrightarrow \bigwedge_{x,y} (xRy \rightarrow xSy)$$

Np. relacja bycia bratem zawiera się w relacji bycia rodzeństwem.

Relacje R i S są **rozłączne** (**wykluczają się**) witw, gdy żadne dwa przedmioty będące ze sobą w relacji R nie są w relacji S:

$$R\,)(\,S \leftrightarrow \bigwedge_{x,y} (xRy \rightarrow \sim xSy)$$

Np. relacja bycia bratem jest rozłączna z relacją bycia siostrą.

Relacja R **krzyżuje się** z relacją S witw, gdy istnieją przedmioty będące ze sobą zarówno w relacji R i w relacji S, a także istnieją przedmioty będące ze sobą w relacji R, lecz nie będące w relacji S, a także istnieją przedmioty będące ze sobą w relacji S, lecz nie będące w relacji R:

$$R \between S \leftrightarrow \bigvee_{x,y} (xRy \wedge xSy) \wedge \bigvee_{x,y} (xRy \wedge \sim xSy) \wedge \bigvee_{x,y} (\sim xRy \wedge xSy)$$

Np. relacja bycia bratem krzyżuje się z relacją bycia tej samej płci.

ZADANIE 4
Określ stosunki zachodzące między relacjami: Z – bycia znajomym, K – kochania, P – bycia przeciwnej płci oraz S – bycia tej samej płci.

DZIAŁANIA NA RELACJACH

Ponieważ relacje są zbiorami par, można na nich wykonywać te same działania jak na zwykłych zbiorach: wyznaczać sumę, iloczyn itd. Operacje te są zdefiniowane tak samo, jak w przypadku zwykłych zbiorów. Ponadto na relacjach można też wykonywać pewne specyficzne działania, takie jak konwers czy złożenie relacji.

Suma relacji R i S to zbiór wszystkich par przedmiotów będących w relacji R lub w relacji S: $R \cup S = \{ \langle x,y \rangle : \ xRy \vee xSy \}$

Np. sumą relacji bycia matką i relacji bycia ojcem jest relacja bycia rodzicem.

Iloczyn relacji R i S to zbiór wszystkich par przedmiotów będących zarazem w relacji R i w relacji S: $R \cap S = \{ \langle x,y \rangle : \ xRy \wedge xSy \}$

Np. iloczynem relacji bycia bratem i relacji bycia starszym jest relacja bycia starszym bratem.

Różnica relacji R i S to zbiór wszystkich par przedmiotów będących w relacji R, a nie będących w relacji S: $R - S = \{ \langle x,y \rangle : \ xRy \wedge {\sim}xSy \}$

Np. różnicą relacji bycia rodzeństwem i relacji bycia bratem jest relacja bycia siostrą.

Różnica symetryczna relacji R i S to zbiór wszystkich par przedmiotów będących dokładnie w jednej z tych relacji R i S:

$$R \div S = \{ \langle x,y \rangle : \ (xRy \wedge {\sim}xSy) \vee ({\sim}xRy \wedge xSy) \}$$

Np. różnicą symetryczną relacji bycia krewnym i relacji bycia w różnym wieku jest relacja bycia spokrewnionym rówieśnikiem lub niespokrewnioną osobą w innym wieku.

Dopełnienie relacji R to zbiór wszystkich par przedmiotów nie będących w relacji R:

$$R' = \{ \langle x,y \rangle : \ {\sim}xRy \}$$

Np. dopełnieniem relacji bycia większym jest relacja bycia niewiększym.

ZADANIE 5

(1) Wyznacz sumę, iloczyn, obie różnice i dopełnienia relacji bycia mniejszym i relacji bycia równym.
(2) Wyznacz różnicę symetryczną relacji bycia niewiększym i relacji bycia niemniejszym.
(3) Wyznacz iloczyn relacji bycia niemniejszym i relacji bycia niewiększym.
(4) Wyznacz sumę, iloczyn, obie różnice i dopełnienia relacji bycia nieznajomym i relacji bycia przyjacielem.
(5) Wyznacz iloczyn relacji bycia rodzeństwem i dopełnienia relacji bycia siostrą.
(6) Przedstaw relację bycia osobą pozostającą (z kimś) w związku małżeńskim jako sumę dwóch relacji.
(7) Przedstaw relację bycia bliźniakiem jako iloczyn dwóch relacji.
(8) Przedstaw relację bycia rówieśnikiem jako dopełnienie relacji.
(9) Przedstaw relację bycia bliźniakiem jako różnicę dwóch relacji.

Konwers relacji R (**relacja odwrotna** do R) to zbiór wszystkich par przedmiotów $\langle y,x\rangle$, takich że para $\langle x,y\rangle$ jest w relacji R:

$$\breve{R} = \{ \langle y,x\rangle : xRy \}$$

(Inne często spotykane oznaczenie konwersu relacji R to symbol R^{-1}.)
Np. konwersem relacji bycia żoną jest relacja bycia mężem.

ZADANIE 6

(1) Wyznacz konwers relacji $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.

(2) Wyznacz konwers relacji bycia:
  (a) rodzicem,
  (b) rodzeństwem,
  (c) bratem,
  (d) krewnym,
  (e) ojcem,
  (f) zwierzchnikiem,
  (g) podobnym,
  (h) młodszym,
  (i) w tym samym wieku.

WŁASNOŚCI konwersu relacji

$$R \subset A \times B \;\rightarrow\; \breve{R} \subset B \times A$$

$$D(\breve{R}) = \breve{D}(R) \qquad \breve{D}(\breve{R}) = D(R)$$

$$\breve{\breve{R}} = R \qquad \breve{R}' = (\breve{R})' \qquad \overbrace{R - S}^{\smile} = \breve{R} - \breve{S}$$

$$\overbrace{R \cup S}^{\smile} = \breve{R} \cup \breve{S} \qquad \overbrace{R \cap S}^{\smile} = \breve{R} \cap \breve{S}$$

Złożeniem (**superpozycją, iloczynem względnym, iloczynem relatywnym**) relacji R i relacji S nazywamy relację, która zachodzi między przedmiotami x i y witw, gdy x jest w relacji R do pewnego przedmiotu z będącego w relacji S do y:

$$R \circ S = \{ \langle x,y\rangle : \bigvee_{z} (xRz \wedge zSy) \}$$

Kwadratem (**potęgą**) relacji R nazywamy złożenie jej z nią samą:

$$R^2 = R \circ R$$

PRZYKŁADY:

(1) Złożeniem relacji bycia żoną z relacją bycia synem jest relacja bycia żoną syna, czyli synową.

(2) Złożeniem relacji bycia synem z relacją bycia żoną jest relacja bycia synem żony (czyli synem naturalnym lub pasierbem).

(3) Kwadratem relacji bycia synem jest relacja bycia synem syna, czyli relacja bycia wnukiem.

WŁASNOŚCI złożenia relacji

- Składanie relacji nie jest operacją przemienną, gdyż na ogół $R \circ S \neq S \circ R$.
- Składanie relacji jest operacją łączną, tzn. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- Relacja odwrotna do złożenia dwóch relacji jest identyczna ze złożeniem relacji odwrotnych do danych w odwrotnej kolejności:

$$\breve{\overbrace{R \circ S}} = \breve{R} \circ \breve{S}$$

ZADANIE 7

(1) Wyznacz złożenie następujących par relacji:
- (a) relacji bycia żoną i relacji bycia bratem,
- (b) relacji bycia matką i relacji bycia mężem,
- (c) relacji bycia ojcem i relacji bycia rodzicem,
- (d) relacji bycia siostrą i relacji bycia matką,
- (e) relacji bycia przodkiem i relacji bycia przodkiem.

(2) Dane są relacje $R \subset A^2$ i $S \subset A^2$ określone w zbiorze $A = \{a,b,c,d\}$, takie że:

$$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$$

$$S = \{\langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle\}$$

Wyznacz złożenia relacji $R \circ S$ i $S \circ R$.

(3) Wyznacz złożenie relacji bycia kopią i relacji bycia fragmentem oraz złożenie relacji bycia fragmentem i relacji bycia kopią.

(4) Wyznacz złożenie relacji bycia młodszym i relacji bycia bratem.

(5) Niech K będzie relacją bycia kwadratem, zaś M – relacją bycia mniejszym. Sprawdź, które z podanych niżej par liczb należą do złożenia $K \circ M$, a które do złożenia $M \circ K$:

(a) $\langle 1,3\rangle$	(d) $\langle 4,5\rangle$
(b) $\langle 1,1\rangle$	(e) $\langle 4,2\rangle$
(c) $\langle 2,3\rangle$	(f) $\langle 9,4\rangle$

(6) Wyznacz kwadrat relacji:
- (a) bycia dwukrotnością,
- (b) bycia bratem,
- (c) bycia dzieckiem,
- (d) bycia sześcianem (liczby),
- (e) bycia o dziesięć większym.

(7) Przedstaw jako złożenie dwóch relacji:
- (a) relację bycia stryjem,
- (b) relację bycia o 3 mniejszym,
- (c) relację bycia szóstą potęgą,
- (d) relację posiadania wspólnych krewnych,
- (e) relację bycia teściem.

Niektóre zadania lub ich fragmenty pochodzą z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.