

WŁASNOŚCI RELACJI

Dana niech będzie relacja R określona w zbiorze A ($R \subset A^2$).

Relacja $R \subset A^2$ jest **zwrotna** w danym zbiorze witw, gdy zachodzi między każdym elementem tego zbioru a nim samym:

$$\text{Zwr}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} xRx$$

Np. relacja równości jest zwrotna (w każdym zbiorze).

ZADANIE 1

Sprawdź, która z podanych niżej relacji jest relacją zwrotną (w odpowiednim zbiorze):

- M – relacja bycia matką,
- B – relacja bycia bratem,
- Z – relacja zwierzchnictwa,
- K – relacja bycia krewnym,
- D – relacja bycia dwukrotnością,
- R – relacja równobarwności,
- W – relacja wynikania logicznego,
- P – relacja bycia podzbiorem,
- E – relacja bycia elementem.

Relacja $R \subset A^2$ jest **przeciwzwrotna** w danym zbiorze witw, gdy nie zachodzi między żadnym elementem tego zbioru a nim samym:

$$\text{PZwr}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} \sim xRx$$

Np. relacja mniejszości jest przeciwzwrotna (w każdym zbiorze).

ZADANIE 2

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją przeciwzwrotną (w odpowiednim zbiorze).

Relacja $R \subset A^2$ jest **symetryczna** w danym zbiorze witw, gdy zachodząc między dowolnymi elementami x oraz y tego zbioru, zachodzi też między y i x :

$$\text{Sym}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x, y \in A} (xRy \rightarrow yRx)$$

Np. relacja równoległości jest symetryczna (w każdym zbiorze).

ZADANIE 3

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją symetryczną (w odpowiednim zbiorze).

Relacja $R \subset A^2$ jest **asymetryczna** w danym zbiorze witw, gdy zachodząc między dowolnymi elementami x oraz y tego zbioru, nie zachodzi między y i x :

$$\text{Asym}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in A} (xRy \rightarrow \sim yRx)$$

Np. relacja starszeństwa i relacja bycia podzbiorem właściwym są asymetryczne (w każdym zbiorze).

Każda relacja asymetryczna jest przeciwzwrotna !

ZADANIE 4

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją asymetryczną (w odpowiednim zbiorze).

Relacja $R \subset A^2$ jest **antysymetryczna** w danym zbiorze witw, gdy zachodząc między dowolnymi różnymi od siebie elementami x oraz y tego zbioru, nie zachodzi między y i x :

$$\text{Antysym}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in A} (xRy \wedge x \neq y \rightarrow \sim yRx)$$

Warunek ten można też sformułować tak:

$$\text{Antysym}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in A} (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

Tak więc w relacji antisymetrycznej mogą się znaleźć pary postaci $\langle x, x \rangle$ a zatem:

Relacja antisymetryczna nie musi być przeciwzwrotna.

Np. relacja niewiększości jest antisymetryczna (w każdym zbiorze).

Każda relacja asymetryczna jest antisymetryczna
(lecz niekoniecznie musi być odwrotnie.)

Np. relacja mniejszości ($<$) jest asymetryczna, a zarazem antisymetryczna, natomiast relacja niewiększości ($\leq$) jest tylko antisymetryczna.

ZADANIE 5

Czy relacja symetryczna może być antisymetryczna?

ZADANIE 6

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją antisymetryczną (w odpowiednim zbiorze).

Relacja $R \subset A^2$ jest **przechodnia** w danym zbiorze witw, gdy zachodząc między dowolnymi elementami x i y oraz y i z tego zbioru, zachodzi między x i z :

$$\text{Prz}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y,z \in A} (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

Warunek ten można też sformułować tak: $R \circ R \subset R$.

Np. relacja równoległości i relacja podobieństwa geometrycznego są przechodnie (w każdym zbiorze).

ZADANIE 7

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją przechodnią (w odpowiednim zbiorze).

Relacja $R \subset A^2$ jest **spójna** w danym zbiorze witw, gdy zachodzi między dowolnymi różnymi od siebie elementami tego zbioru:

$$\text{Sp}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in A} (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$$

Warunek ten można też sformułować tak:

$$\text{Sp}(R) \leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in A} (x = y \vee xRy \vee yRx)$$

Np. relacja mniejszości i relacja niewiększości są spójne.

ZADANIE 8

Sprawdź, która z relacji podanych w zadaniu 1 jest relacją spójną (w odpowiednim zbiorze).

ZADANIE 9

Podaj zbiór, w którym dana relacja jest spójna.

- (1) Relacja pokrewieństwa.
- (2) Relacja równobarwności.
- (3) Relacja różnobarwności.

Relacje można reprezentować graficznie w postaci grafów: wierzchołki (punkty) reprezentują elementy zbioru, w którym określona jest relacja, a strzałki z punktu a do punktu b odpowiadają zachodzeniu relacji aRb ; w przypadku, gdy zachodzi aRa , strzałka przyjmuje postać pętli (z punktu a do punktu a).

- (1) Relacja zwrotna ma wszystkie pętle.
- (2) Relacja przeciwzwrotna nie ma żadnej pętli.
- (3) Relacja symetryczna, jeśli ma strzałkę z a do b, to musi mieć też strzałkę z b do a (równoległą, lecz przeciwnie skierowaną) – czyli wszystkie strzałki ma podwójne.
- (4) Relacja asymetryczna nie ma żadnych podwójnych strzałek ani pętli.
- (5) Relacja antysymetryczna nie ma żadnych podwójnych strzałek, ale może mieć pętle.
- (6) Relacja przechodnia, jeśli ma strzałki z a do b i z b do c, to musi też mieć strzałkę z a do c.
- (7) Relacja spójna musi mieć co najmniej jedną strzałkę między dwoma dowolnymi wierzchołkami.

ZADANIE 10

Określ wszystkie własności formalne podanych niżej relacji, określonych w zbiorze wszystkich ludzi.

- (1) Relacja bycia znajomym.
- (2) Relacja bycia przeciwnej płci.

- (3) Relacja wyznawania tej samej religii.
- (4) Relacja bycia o rok starszym.

ZADANIE 11

Niech X będzie zbiorem czteroelementowym: $X = \{a, b, c, d\}$. Jakie własności formalne posiadają w zbiorze X relacje R , S i T .

- (1) $R = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle d, c \rangle\}$.
- (2) $S = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, d \rangle\}$.
- (3) $T = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}$.

ZADANIE 12

Podaj przykład relacji, która w zbiorze $X = \{a, b, c\}$ ma podane własności.

- (1) Zwrotna, symetryczna i przechodnia.
- (2) Asymetryczna, przechodnia i spójna.
- (3) Symetryczna i antysymetryczna.
- (4) Asymetryczna i antysymetryczna.
- (5) Antysymetryczna, lecz nie asymetryczna.

Relacją równoważności (relacją równościową) w danym zbiorze nazywamy relację zwrotną, symetryczną i przechodnią w tym zbiorze.

Relacją równoważności są np.: relacja pełna, relacja identyczności, relacja podobieństwa geometrycznego, relacja bycia tego samego wzrostu, bycia tego samego koloru, tego samego ciężaru, tej samej objętości, tej samej religii, tego samego kształtu itp.

ZADANIE 13

Czy relacja $R \subset \{a, b, c\}^2$, taka że $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$ jest relacją równoważności?

Jeśli $R \subset A^2$ jest relacją równoważności w zbiorze A oraz x jest elementem zbioru A , to zbiór wszystkich elementów zbioru A pozostających w relacji R do x nazywamy **klasą abstrakcji** (klasą równoważności) elementu x i oznaczamy $[x]_R$:

$$[x]_R = \{y \in A : xRy\}$$

Element x nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[x]_R$.

Np. dla relacji R rówieństwa w zbiorze ludzi, $[Ala]_R$ = zbiór wszystkich ludzi będących w tym samym wieku co Ala.

ZADANIE 14

Określ klasy abstrakcji dla poniższych relacji.

- (1) Relacja R z poprzedniego zadania.
- (2) Relacja równobarwności R w danym zbiorze przedmiotów.

- (3) Relacja równieństwa R określona w zbiorze $\{\text{Jan}_{88}, \text{Piotr}_{88}, \text{Marek}_{88}, \text{Adam}_{92}, \text{Kuba}_{92}\}$, gdzie indeks dolny przy imieniu to rok urodzenia danej osoby. Określ najpierw samą relację R .

ZADANIE 15

Jakie cechy ma graf relacji równoważności?

(Sprawdź na przykładzie relacji równieństwa z poprzedniego zadania)

WŁASNOŚCI klas abstrakcji

Dla dowolnej relacji równoważności R określonej w zbiorze A ($R \subset A^2$) zachodzą następujące fakty:

- (1) $[x]_R = [y]_R \leftrightarrow xRy$
- (2) Relacja R jest spójna w każdej klasie abstrakcji.
- (3) Elementy różnych klas abstrakcji nigdy nie są ze sobą w danej relacji R .
- (4) Klasy abstrakcji są niepuste (bo $x \in [x]_R$).
- (5) Różne klasy abstrakcji są ze sobą rozłączne.
- (6) Suma rodziny wszystkich klas abstrakcji jest identyczna ze zbiorem A , w którym określona jest dana relacja równoważności.

Rodzinę wszystkich klas abstrakcji danej relacji równoważności R określonej w zbiorze A ($R \subset A^2$) nazywamy **zbiorem ilorazowym** zbioru A względem relacji R i oznaczamy A/R .

$$A/R = \{ [x]_R : x \in A \}$$

ZADANIE 16

Wyznacz zbiory ilorazowe dla relacji:

- (1) Podanej w zadaniu 13.
- (2) Podanej w zadaniu 14, p.(2), określonej w zbiorze przedmiotów P .
- (3) Podanej w zadaniu 14, p.(3).
- (4) Relacji pełnej określonej w zbiorze A .

ZADANIE 17

Narysuj graf relacji równoważności o następującym zbiorze ilorazowym:

$$A/R = \{ \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7, x_8\} \}$$

Jak wynika z w.w. własności (4), (5) i (6), A/R , czyli zbiór ilorazowy zbioru A względem relacji R , stanowi podział zbioru A ; blokami tego podziału są klasy abstrakcji relacji równoważności R . Innymi słowy, każda relacja równoważności wyznacza pewien podział zbioru, w którym jest określona. Np. relacja równieństwa wyznacza podział zbioru ludzi na poszczególne roczniki, relacja równobarwności – podział zbioru przedmiotów na zbiory obiektów w tym samym kolorze, relacja posiadania nazwiska na tę samą literę – podział zbioru ludzi na grupy osób, których nazwiska zaczynają się na tę samą literę.

ZADANIE 18

Wskaż podział zbioru $P = \{\text{Szekspir}, \text{Byron}, \text{Mickiewicz}, \text{Puszkina}, \text{Tuwim}\}$ wyznaczony przez relację posiadania tej samej narodowości ograniczoną do tego zbioru.

ZADANIE 19

Wskaż podziały zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ wyznaczone przez poniższe relacje:

- (1) $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$
- (2) $S = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle\}$

Jest także odwrotnie: każdy podział zbioru wyznacza pewną relację równoważności określoną w tym zbiorze, a mianowicie relację należenia do tego samego bloku podziału (łatwo sprawdzić, że jest to relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia). Oczywiście klasy abstrakcji tej relacji są identyczne z blokami tego podziału (czyli jej zbiór ilorazowy jest identyczny z danym podziałem).

ZADANIE 20

Określ relacje równoważności wyznaczone przez podane niżej podziały:

- (1) Zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$: $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \{0\}\}$.
- (2) Zbioru ludzi L : $\mathcal{B} = \{K, M\}$ (K – zbiór kobiet, M – zbiór mężczyzn).
- (3) Zbioru liter $A = \{a, b, c, d\}$:
- (a) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$,
- (b) $\mathcal{D} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$,
- (c) $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Omówioną tu wzajemną odpowiedniość między podziałami a relacjami równoważności opisuje łącznie następująca zasada abstrakcji.

ZASADA ABSTRAKCJI

1. Zbiór ilorazowy dowolnej relacji równoważności tworzy podział zbioru.
2. Dla każdego podziału zbioru istnieje dokładnie jedna relacja równoważności, której zbiór ilorazowy jest identyczny z tym podziałem.