

PORZĄDKI

Relacją częściowo porządkującą dany zbiór (częściowym porządkiem w tym zbiorze) nazywamy każdą relację, która jest w tym zbiorze:

– asymetryczna i przechodnia (tzw. **mocny porządek**)

lub też jest:

– zwrotna, antysymetryczna i przechodnia (tzw. **słaby porządek**).

Zbiór z określonym w nim porządkiem nazywamy **zbiorem uporządkowanym**.

ZADANIE 1

Sprawdź, czy poniższe relacje są porządkami (i ewentualnie jakimi).

- (1) Relacja bycia niższym.
- (2) Relacja bycia starszym.
- (3) Relacja bycia podzbiorem właściwym.
- (4) Relacja bycia zwierzchnikiem.
- (5) Relacja bycia podzielnikiem.
- (6) Relacja $R = \{ \langle \text{Ala}, \text{Ela} \rangle, \langle \text{Ala}, \text{Ola} \rangle, \langle \text{Ala}, \text{Ula} \rangle, \langle \text{Ela}, \text{Ola} \rangle, \langle \text{Ula}, \text{Ola} \rangle \}$.
- (7) Relacja $S = \{ \langle a_2, a_3 \rangle, \langle a_1, a_3 \rangle, \langle a_4, a_3 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_4 \rangle, \langle a_5, a_1 \rangle, \langle a_5, a_3 \rangle \}$.

W przypadku relacji porządkujących, zamiast oznaczeń typu R czy S, często stosowane są symbole $<$ (dla mocnych porządków) lub $\leq$ (dla słabych).

ZADANIE 2

Narysuj grafy relacji (6) i (7) z zadania 1.

Każdy porządek R ustala pewną kolejność elementów zbioru, w którym jest określony: element x jest w tej kolejności przed (różnym od niego) elementem y witw, gdy xRy ; (mówimy wówczas, że x poprzedza y; $x < y$).

Jeśli jest tak, że x poprzedza y lub też y poprzedza x, to mówimy, że są to elementy porównywalne.

Jak łatwo zauważyć, w omawianych przykładach występują elementy, które są nieporównywalne (nie można ustalić ich wzajemnej kolejności). Dlatego właśnie omawiane relacje nazywa się częściowymi porządkami. Przykładowo, w relacji bycia wyższym wzajemna kolejność jest nieustalona dla wszystkich ludzi tego samego wzrostu.

Mówi się, że element x zbioru uporządkowanego relacją R nakrywa element y, jeżeli yRx oraz nie istnieje w tym zbiorze taki element u, że yRu oraz uRx .

Innymi słowy, x nakrywa y witw, gdy y poprzedza x oraz nie ma takiego elementu, który by jednocześnie był poprzedzany przez y, a sam poprzedzał x.

Można by więc wtedy powiedzieć, że y „bezpośrednio” poprzedza x, albo też że nakrywanie oznacza bezpośrednie następstwo (elementu x po y) w danym porządku.

ZADANIE 3

Dla relacji S z zadania 1 p. (7), podaj pary elementów:

- (1) nieporównywalnych,
- (2) w których pierwszy element poprzedza drugi,
- (3) w których pierwszy element nakrywa drugi.

Diagram Hassego to graf, przedstawiający porządek w zbiorze w następujący sposób. Jeśli X jest zbiorem uporządkowanym, to tworzymy graf, którego wierzchołki reprezentują elementy zbioru X i którego dwa wierzchołki połączone są krawędzią wstępu, gdy jeden z danych elementów nakrywa drugi. Na diagramie nie oznacza się kierunku krawędzi grafu; zamiast tego element nakrywający jest rysowany wyżej od elementów przez siebie nakrywanych.

ZADANIE 4

Narysuj diagram Hassego dla:

- (1) Relacji S z zadania 1 p. (7).
- (2) Relacji $R = S \cup \{\langle a_6, a_2 \rangle, \langle a_6, a_4 \rangle, \langle a_6, a_3 \rangle, \langle a_6, a_1 \rangle, \langle a_7, a_2 \rangle, \langle a_7, a_4 \rangle, \langle a_7, a_3 \rangle, \langle a_7, a_1 \rangle, \langle a_5, a_8 \rangle\}$.
- (3) Relacji inkluzji określonej w zbiorze potęgowym zbioru $A = \{a, b\}$.
- (4) Relacji inkluzji określonej w zbiorze potęgowym zbioru $B = \{a, b, c\}$.
- (5) Relacji bycia podzielnikiem ograniczonej do zbioru $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- (6) Relacji bycia podzielnikiem ograniczonej do zbioru $D = \{1, 2, \dots, 15\}$.
- (7) Relacji mniejszości ograniczonej do zbioru $E = \{1, 2, \dots, 10\}$.

W ostatnim przykładzie diagram Hassego ma charakterystyczny liniowy kształt. Może tak być jedynie wówczas, gdy wszystkie elementy zbioru są ze sobą porównywalne. Aby tak było, relacja musi być spójna.

Porządkiem liniowym (albo zupełnym) w danym zbiorze nazywamy taką relację porządkującą dany zbiór, która jest w tym zbiorze spójna.

Porządkami liniowymi są więc np. relacje mniejszości, większości, niemniejszości czy niewiększości określone w zbiorze liczb.

ZADANIE 5

W jakim zbiorze relacja bycia starszym jest porządkiem liniowym?

Łańcuchem nazywamy taki podzbiór zbioru uporządkowanego, w którym dany porządek jest liniowy.

Zbiór jest więc łańcuchem, gdy relacja porządku jest w nim spójna – czyli gdy dowolne dwa różne jego elementy są porównywalne (tzn. jeden z nich musi poprzedzać drugi). Na diagramie Hassego łańcuchom odpowiadają jego „liniowe” fragmenty. Oczywiście każdy zbiór liniowo uporządkowany i każdy jego podzbiór są łańcuchami.

Antyłańcuchem nazywamy taki podzbiór zbioru uporządkowanego, w którym dowolne dwa różne jego elementy są nieporównywalne.

Zbiór jest więc antyłańcuchem, gdy żaden jego element nie poprzedza innego elementu. Na diagramie Hassego antyłańcuchom odpowiadają zbiory osobnych (niepołączonych z innymi) punktów.

W zbiorze uporządkowanym:

- ♦ **Element minimalny** to taki, który nie jest poprzedzany przez żaden inny.
- ♦ **Element maksymalny** to taki, który nie poprzedza żadnego innego.
- ♦ **Element najmniejszy** to taki, który poprzedza wszystkie inne.
- ♦ **Element największy** to taki, który jest poprzedzany przez wszystkie inne.

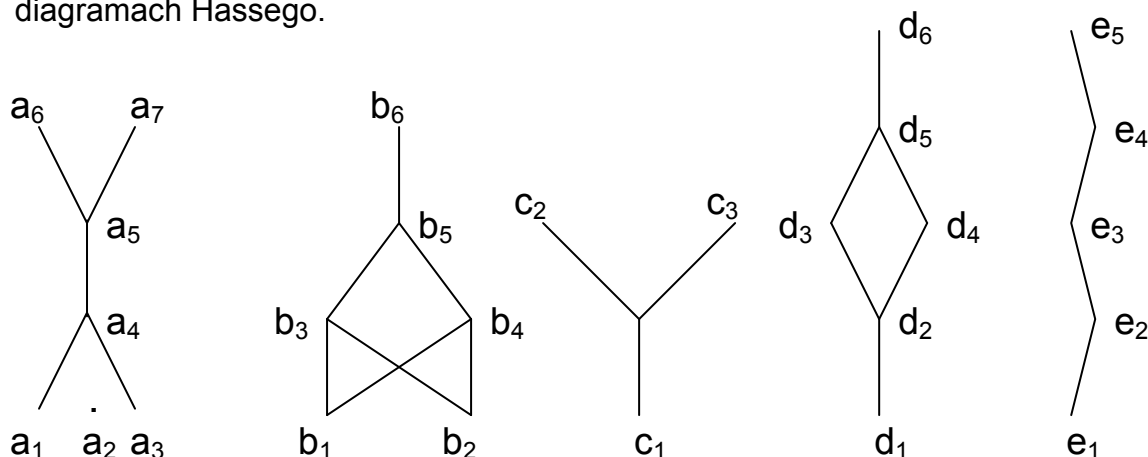
Oczywiście element najmniejszy jest zarazem minimalny, a element największy jest jednocześnie maksymalny. Z kolei nie każdy element minimalny jest najmniejszy, a nie każdy maksymalny jest największy.

Elementów minimalnych czy maksymalnych może być wiele, natomiast element najmniejszy czy największy może być co najwyżej jeden.

Jeśli istnieje element najmniejszy (największy) to będzie on zarazem jedynym elementem minimalnym (maksymalnym).

ZADANIE 6

Wskaż elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze i największe na poniższych diagramach Hassego.



ZADANIE 7

Jakie elementy można wyróżnić:

- (1) W zbiorze liczb naturalnych z relacją niewiększości?
- (2) W zbiorze liczb naturalnych z relacją niemniejszości?
- (3) W zbiorze liczb naturalnych z relacją bycia dzielnikiem?
- (4) W zbiorze liczb $\{2, 3, 4, \dots\}$ z relacją bycia dzielnikiem?

ZADANIE 8

Określ typ poniższych relacji: równoważność czy porządek (jaki ?)

- (1) Relacja bycia tej samej płci.
- (2) Relacja bycia młodszym.
- (3) Relacja bycia tego samego wzrostu.
- (4) Relacja bycia wyższym.
- (5) Relacja bycia rówieśnikiem.
- (6) Relacja bycia tej samej narodowości.
- (7) Relacja kolejności alfabetycznej.