

Rachunek zdań można interpretować jako pewien język – język formuł logicznych. Oto gramatyka definiująca język KRZ, czyli **klasycznego rachunku zdań**.

Gramatyka = alfabet + syntaksa + semantyka

Alfabet – zestaw znaków prostych:

1. zmienne zdaniowe: $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$
2. spójniki logiczne: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp, \downarrow, \mid$ (stałe logiczne)
3. symbole pomocnicze: $(,)$

Są to jedyne znaki, z których tworzy się wyrażenia języka KRZ, przy czym wyrażeniem takim jest każdy skończony ciąg elementów alfabetu języka KRZ. Wśród nich wyróżnia się wyrażenia poprawnie zbudowane („sensowne”) języka KRZ, czyli formuły tego języka.

Syntaksa (składnia) – zestaw reguł budowania sensownych wyrażeń złożonych; wyznacza zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł logicznych (pzfl):

1. Każda zmienna zdaniowa jest pzfl.
2. Jeśli φ i ψ są pzfl, to: $\sim(\varphi), \wedge(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \rightarrow (\psi), (\varphi) \leftrightarrow (\psi), (\varphi) \perp (\psi), (\varphi) \downarrow (\psi), (\varphi) \mid (\psi)$ są pzfl.
3. Ciąg symboli słownika jest pzfl wtedy i tylko wtedy, gdy powstał przy użyciu reguł 1. i 2.

(Uwaga: symbole φ i ψ są tutaj metajęzykowymi zmiennymi, za które można wstawiać formuły logiczne.)

Semantyka – określa znaczenia formuł logicznych:

1. Lista znaczeń przypisywanych formułom (pzfl) – jest dwuelementowa: prawda i fałsz (**1** i **0**).
2. Zasada Fregego (zasada kompozycyjności) mówi, że znaczenie wyrażenia złożonego jest funkcją znaczeń jego składników. Oznacza to tutaj, że wartość logiczna formuły (poprawnie) zbudowanej z danego spójnika logicznego i jego argumentów zależy w jednoznaczny sposób – oczywiście różny dla różnych spójników – od wartości logicznych tych argumentów (zdań składowych). Opis realizacji zasady Fregego zawarty jest w tzw. tabelkach zerojedynkowych (tabelkach prawdziwościowych, macierzach logicznych):

φ	$\sim\varphi$	$\wedge\varphi$
0	1	0
1	0	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \perp \psi$	$\varphi \mid \psi$	$\varphi \downarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Matryce logiczne opisują, jak dla poszczególnych spójników logicznych wartość logiczna zdania złożonego zależy od wartości logicznych zdań, które są połączone danym spójnikiem.

- Zdania sprzeczne mają zawsze przeciwne wartości logiczne.
- Zdanie i jego asercja mają zawsze te same wartości logiczne.
- Koniunkcja jest prawdziwa wtedy, gdy oba jej czynniki są prawdziwe.
- Alternatywa jest fałszywa wtedy, gdy oba jej składniki są fałszywe.
- Alternatywa rozłączna jest prawdziwa wtedy, gdy dokładnie jeden jej składnik jest prawdziwy.
- Dysjunkcja jest prawdziwa wtedy, gdy co najwyżej jeden z jej czynników jest prawdziwy.
- Binegacja jest prawdziwa wtedy, gdy żaden z jej składników nie jest prawdziwy.
- Równoważność jest prawdziwa wtedy, gdy obie jej strony mają tę samą wartość logiczną.
- Implikacja jest fałszywa wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy.

UWAGA: prawdziwość implikacji oznacza, że przy prawdziwym jej poprzedniku prawdziwy jest też jej następnik; natomiast przy fałszywym poprzedniku – następnik może być dowolny (a implikacja pozostaje prawdziwa) !!!

ZADANIE 1

Określ jaką wartość logiczną mają poniższe implikacje:

- 1) *Jeżeli Warszawa leży nad Wisłą, to Księżyc jest naturalnym satelitą Ziemi.*
- 2) *Jeżeli Warszawa leży nad Sekwaną, to Księżyc jest naturalnym satelitą Ziemi.*
- 3) *Jeżeli dwa razy dwa równa się cztery, to Warszawa leży nad Sekwaną.*
- 4) *Jeżeli Warszawa leży nad Sekwaną, to Księżyc jest z piernika.*
- 5) *Jeżeli Warszawa leży nad Wisłą, to Księżyc jest z piernika.*
- 6) *Jeżeli wojen już nie będzie na świecie, to słonie żyją w Afryce.*
- 7) *Jeżeli Warszawa leży nad Sekwaną, to wojen już nie będzie na świecie.*

Funkcje prawdziwościowe to funkcje określone na zbiorze wartości logicznych $\{0,1\}$ o wartościach w tym samym zbiorze.

Dwie powyższe tabelki zerojedynkowe definiują zatem pewne funkcje prawdziwościowe, odpowiednio jedno- i dwuargumentowe (w kolumnach dla φ i ψ podane są wartości argumentów, zaś w pozostałych kolumnach – wartości poszczególnych funkcji prawdziwościowych dla tych argumentów). Każdemu spójnikowi logicznemu odpowiada więc pewna funkcja prawdziwościowa. Przykładowo, jednoargumentowa funkcja f zdefiniowana przez równości: $f(0)=1$ i $f(1)=0$ odpowiada spójnikowi negacji, zaś dwuargumentowa funkcja k zdefiniowana przez równości: $k(0,0)=0$, $k(0,1)=0$, $k(1,0)=0$, $k(1,1)=1$ odpowiada spójnikowi

koniunkcji. Jak widać, funkcje prawdziwościowe charakteryzują semantyczne własności spójników logicznych (ekstensjonalnych).

Teoretycznie możemy zajmować się jeszcze innymi spójnikami logicznymi, opisywanymi przez pozostałe funkcje prawdziwościowe, nie wymienione w powyższych tabelkach; np. wszystkich możliwych funkcji prawdziwościowych jednoargumentowych jest tyle, ile możliwych układów (wariacji z powtórzeniami) zer i jedynek na dwóch miejscach, czyli $2 \cdot 2 = 4$. Tak więc oprócz negacji i asercji, opisanych w pierwszej tabelce, możemy rozpatrywać jeszcze dwa inne spójniki logiczne jednoargumentowe: **verum** (spójnik afirmacji) [**V**] (*jest tak lub nie jest tak, że*) i **falsum** (spójnik odrzucania) [**F**] (*jest tak i zarazem nie jest tak, że*).

φ	$\sim\varphi$	$A\varphi$	$V\varphi$	$F\varphi$
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

Z kolei wszystkich możliwych funkcji prawdziwościowych dwuargumentowych jest tyle, ile możliwych układów (wariacji z powtórzeniami) zer i jedynek na czterech miejscach, czyli $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. A zatem oprócz siedmiu wymienionych w drugiej tabelce możemy teoretycznie jeszcze rozważać dziewięć innych spójników. Wszystkie tego rodzaju spójniki nazywamy ekstensjonalnymi lub prawdziściowymi.

ZADANIE 2

Utworzyć tabelę dla 3-argumentowej alternatywy zwykłej (prawdziwej witw., gdy co najmniej jeden składnik jest prawdziwy).

Spójnik logiczny nazywamy **ekstensjonalnym** (prawdziściowym) witw, gdy wartość logiczna każdego zdania zbudowanego przy użyciu tego spójnika zależy tylko i wyłącznie (jednoznacznie) od wartości logicznych zdań będących jego argumentami.

Ekstensjonalność jest cechą charakterystyczną wszystkich spójników klasycznej logiki zdań.

Spójnik logiczny nazywamy **intensjonalnym** (treściowym) witw, gdy spójnik ten nie jest ekstensjonalny.

Jeśli w zdaniu złożonym utworzonym przy pomocy spójnika ekstensjonalnego zastąpimy jakieś jego zdanie składowe dowolnym innym zdaniem o tej samej wartości logicznej, to wartość logiczna całego zdania złożonego nie ulegnie zmianie. Dla spójników intensjonalnych owa wymienialność *salva veritate*, tj. z zachowaniem wartości logicznej, nie zachodzi, gdyż w ich przypadku wartość logiczna zdania zbudowanego przy ich pomocy zależy raczej od treści niż od wartości logicznej zdań będących ich argumentami.

PRZYKŁADY

- spójniki ekstensjonalne – zdefiniowane w tabelkach zerojedynekowych;

- spójniki intensjonalne jednoargumentowe
 - aletyczne: *jest możliwe, że; jest konieczne, że;*
 - epistemiczne: *Jan wierzy, że; jestem przekonany, że; wiadomo, że;*
 - deontyczne: *jest nakazane, że; jest dozwolone, że; jest zakazane to, że;*
 - temporalne: *zawsze było tak, że; niekiedy będzie tak, że.*
- spójniki intensjonalne dwuargumentowe: *ponieważ, zanim, od kiedy* (since), *dopóki* (until), *a następnie, obowiązkowe jest to, że ... pod warunkiem, że ...*

Nieklasyczne logiki zdaniowe – np. (aletyczne) logiki modalne, logiki epistemiczne, deontyczne, temporalne (także wielowartościowe i różne inne).

ZADANIE 3

Określ jaką wartość logiczną posiada:

1. pierwszy z argumentów prawdziwej koniunkcji
2. drugi z argumentów fałszywej alternatywy zwykłej
3. poprzednik fałszywej implikacji
4. drugi z argumentów prawdziwej binegacji
5. następnik fałszywej implikacji
6. drugi z argumentów fałszywej dysjunkcji
7. drugi z argumentów prawdziwej koniunkcji
8. pierwszy z argumentów prawdziwej binegacji