

Tautologia to schemat zdań wyłącznie prawdziwych.

Kontrtautologia to schemat zdań wyłącznie fałszywych.

Pozostałe formuły logiczne to tzw. **formuły logicznie niezdeterminowane**
(inaczej: formuły spełnialne)

Zdanie analityczne (prawda analityczna) to zdanie, które jest zawsze prawdziwe (na mocy znaczeń użytych w nim wyrażen).

Prawda logiczna (zdanie logicznie prawdziwe) to zdanie, którego schematem jest tautologia.

Logiczna prawdziwość zdania zależy wyłącznie od jego struktury i znaczeń występujących w nim stałych logicznych (w KRZ – od spójników logicznych i odpowiadających im tabelek prawdziwościowych).

Zdanie kontranalityczne (zdanie kontradyktoryczne, fałsz analityczny) to zdanie, które jest zawsze fałszywe (na mocy znaczeń użytych w nim wyrażen).

Fałsz logiczny (zdanie logicznie fałszywe) to zdanie, którego schematem jest kontrtautologia.

Zdanie syntetyczne to zdanie, którego wartość logiczna nie może być ustalona bez odwoływania się do rzeczywistości.

Wartości logicznej zdań syntetycznych nie możemy wyznaczyć odwołując się wyłącznie do reguł określających znaczenia użytych w nim wyrażen. W odróżnieniu od zdań logicznie (a więc koniecznie) prawdziwych/fałszywych są one tylko przygodnie prawdziwe/fałszywe.

ZADANIE 1

Określ rodzaj zdania ze względu na jego wartość logiczną i sposób jej wyznaczania (chodzi o rozróżnienie analityczno-syntetyczne);

logiczną prawdziwość lub fałszywość zdania potwierdź metodą nie wprost.

1. *Jeśli Ania jest niższa od Basi, to Basia jest wyższa od Ani.*
2. *Jeżeli Jan skłamał lub Piotr skłamał, to jeśli Jan nie skłamał, to skłamał Piotr.*
3. *Nieprawda, że jeżeli Kolumb nie odkrył Ameryki lub Marco Polo nie był w Ameryce, to nieprawda, że jednocześnie Kolumb odkrył Amerykę i Marco Polo był w Ameryce.*
4. *Ewa poczęstowała jabłkiem Adama i oboje zostali wygnani z raju.*
5. *Żaden adwokat nie jest prawnikiem.*
6. *Jeżeli Kolumb odkrył Amerykę lub Marco Polo był w Ameryce, to jeśli Kolumb odkrył Amerykę, to Marco Polo nie był w Ameryce.*
7. *Brat bliźniak Rafała ma tyle samo lat co Rafał.*

Pojęcia logiczne: implikowanie, wynikanie, wnioskowanie – są różne, lecz ściśle ze sobą powiązane. Implikacja, jak już wiemy, to zdanie złożone zbudowane przy pomocy spójnika implikacji. Ponieważ jest to funktor prawdziwościowy, to wartość logiczna implikacji zależy wyłącznie od wartości logicznych jej poprzednika i następnika, a nie zależy w żaden sposób od ich treści. Np. implikację *Jeśli żyrafa jest większa od myszy, to zebra jest ssakiem*. uznajemy za prawdziwą, a co za tym idzie, możemy prawdziwie stwierdzić, że zdanie *Żyrafa jest większa od myszy*. implikuje zdanie *Zebra jest ssakiem*. Nie powiemy jednak, że to drugie zdanie wynika z pierwszego.

Wynikanie z jednego zdania drugiego zdania oznacza, że prawdziwość tego pierwszego zdania pociąga za sobą prawdziwość drugiego. Gwarantuje to oczywiście, że prawdziwa będzie implikacja, której poprzednikiem jest pierwsze zdanie, a następnikiem – drugie.

Relacja wynikania zachodząca między zdaniami wymaga jednak nie tylko prawdziwości utworzonej z nich implikacji, ale także zachodzenia między nimi jakiegoś związku zapewniającego ową prawdziwość, gwarantującego, że drugie zdanie nie może być fałszywe, o ile tylko pierwsze jest prawdziwe – jak np. w zdaniu:

Jeśli zebra ma gruczoły mlekowe, to zebra jest ssakiem.

Ze zdania α **wynika** zdanie β , gdy spełnione są dwa warunki:

- (1) zdanie postaci „*Jeśli α to β* ” jest prawdziwe,
- (2) pomiędzy zdaniami α i β zachodzi pewien związek o charakterze treściowym lub strukturalnym gwarantujący to, że prawdziwość zdania α pociąga za sobą prawdziwość zdania β .

Jeśli ze zdania α wynika zdanie β , to mówimy, że zdanie α jest **racją** zdania β , zaś zdanie β jest **następstwem** zdania α .

Warunek (1) oznacza, że wynikanie zachodzi jedynie wówczas, gdy i racja, i następstwo są zdaniami prawdziwymi lub gdy racja jest fałszywa (a wtedy następstwo – dowolne).

Warunek (2) wymaga, aby między racją a następstwem zachodził jakiś związek. Może to być np.:

- związek o charakterze analitycznym, np. implikacja: *Jeśli Karol jest bratem Izy, to Iza jest siostrą Karola*. – jest prawdziwa ze względu na sens użytych w niej słów. Mówimy wtedy o **wynikaniu analitycznym**.
- związek o charakterze przyczynowo-skutkowym, np. *Jeśli temperatura spada poniżej zera, to woda zamarza*.
- związek o charakterze strukturalnym, np. *Jeżeli dziś jest piątek, to pojutrze będzie niedziela*.
- związek o charakterze tetycznym, tj. będący konsekwencją ustanowionych norm, np. *Jeżeli ktoś wyrządził szkodę drugiej osobie ze swojej winy, to według Artykułu 415 KC zobowiązany jest do jej naprawienia*.
- związek o charakterze logicznym, czyli szczególny przypadek związku analitycznego, w którym prawdziwość odpowiedniej implikacji jest konsekwencją wyłącznie struktury logicznej racji i następstwa. Np.: *Jeżeli Antek ma skrzypce i Antek ma flet, to Antek ma flet*.

W tym przypadku mówimy o wynikaniu logicznym.

Ze zdania α **wynika logicznie** zdanie β wtedy, gdy zdanie postaci „*Jeśli α to β* ” jest prawdą logiczną.

Jeżeli zdanie β wynika logicznie ze zdania α , to mówimy, że α jest racją logiczną dla β , zaś β jest następstwem logicznym α ; ponadto można też powiedzieć, że α implikuje logicznie β .

Żeby sprawdzić, czy zdanie β wynika logicznie ze zdania α , należy oczywiście sprawdzić, czy formuła $(A) \rightarrow (B)$ (gdzie A i B to schematy zdań α i β) jest tautologią. Jeśli tak jest, to powiemy również, że formuła B wynika logicznie z formuły A . Fakt ten oznaczamy: $A \models B$.

ZADANIE 2

Sprawdź, czy z pierwszego zdania wynika logicznie drugie:

- (a)
 1. *Jeśli Jan jest zakochany, to jest zazdrosny.*
 2. *Jeśli Jan nie jest zazdrosny, to nie jest zakochany.*
- (b)
 1. *Paweł lubi tańczyć.*
 2. *Ewa lubi tańczyć lub Paweł lubi tańczyć.*
- (c)
 1. *Stefan był w Austrii lub Stefan był we Włoszech.*
 2. *Jeśli Stefan nie był w Austrii, to Stefan był we Włoszech.*
- (d)
 1. *Jeśli Tomek zdał maturę, to tata kupił mu skuter.*
 2. *Tata kupił Tomkowi skuter.*

W ogólnym przypadku możemy też mówić o wynikaniu zdania ze zbioru zdań.

Ze zbioru zdań $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ **wynika** zdanie β w tw., gdy spełnione są dwa warunki:

(1) zdanie postaci „*Jeśli α_1 i α_2 i ... i α_n to β* ” jest prawdziwe,

(2) pomiędzy zdaniami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ oraz zdaniem β zachodzi pewien związek o charakterze treściowym lub strukturalnym gwarantujący to, że jednoczesna prawdziwość zdań $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pociąga za sobą prawdziwość zdania β .

Np. ze zbioru zdań $\{ \textit{Romek jest wyższy od Olka, Olek jest wyższy od Jarka, Jarek jest wyższy od Leszka} \}$ wynika zdanie *Leszek jest niższy od Romka*.

Ze zbioru zdań $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ **wynika logicznie** zdanie β w tw., gdy zdanie postaci „*Jeśli α_1 i α_2 i ... i α_n to β* ” jest prawdą logiczną.

Jeśli zdanie β wynika logicznie ze zbioru zdań, to koniunkcję tych zdań nazywamy racją logiczną zdania β , a zdanie β – następstwem logicznym owej koniunkcji.

Np. ze zbioru zdań $\{ \textit{Ewa lubi Adama, Ewa lubi jabłko} \}$ wynika logicznie zdanie *Ewa lubi Adama lub Ewa lubi jabłko*. Natomiast z tego samego zbioru zdań nie wynika logicznie zdanie *Albo Ewa lubi Adama albo Ewa lubi jabłko*.

Żeby sprawdzić, czy zdanie β wynika logicznie ze zbioru zdań $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, należy oczywiście sprawdzić, czy formuła $(A_1) \wedge (A_2) \wedge \dots \wedge (A_n) \rightarrow (B)$ (gdzie A_1, A_2, \dots, A_n i B to odpowiednio schematy zdań $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i β) jest tautologią. Jeśli tak jest, to

powiemy również, że formuła B wynika logicznie ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Fakt ten oznaczamy: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vDash B$. Jeśli $n=1$, to zamiast $\{A\} \vDash B$ możemy oczywiście pisać $A \vDash B$. Jeśli zaś $n=0$, czyli B wynika logicznie ze zbioru pustego, to piszemy $\vDash B$, i oznacza to, że B jest tautologią.

Formuła A jest tautologią witw, gdy wynika logicznie ze zbioru pustego:
 $\vDash A$ witw., gdy $\emptyset \vDash A$

Każda tautologia wynika logicznie z dowolnego zbioru formuł X:
 Jeśli $\vDash A$, to $X \vDash A$.

ZADANIE 3

- (a) Sprawdź, czy zdanie *Piotr przegrał* wynika logicznie ze zbioru zdań:
 $\{Jan\ wygrał, \text{ Jeśli Jan wygrał, to Piotr przegrał } \}$.
- (b) Sprawdź, czy zdanie *Ania ma indeks* wynika logicznie ze zbioru zdań:
 $\{Ania\ idzie\ na\ wykład, \text{ Jeśli Ania idzie na wykład, to Ania jest studentką, Jeśli Ania jest studentką, to Ania ma indeks } \}$.

Zdania α i β są **logicznie równoważne** witw, gdy zdanie postaci
 „ α wtedy i tylko wtedy, gdy β ” jest prawdą logiczną.

Żeby sprawdzić, czy zdania α i β są logicznie równoważne, należy więc sprawdzić, czy formuła $(A) \leftrightarrow (B)$ (gdzie A i B to schematy zdań α i β) jest tautologią. Oczywiście, logiczna równoważność dwóch zdań oznacza, że każde z nich wynika logicznie z drugiego.

ZADANIE 4

Sprawdź, czy pierwsze zdanie jest logicznie równoważne drugiemu:

- (a) 1. *Nieprawda, że jeżeli Jerzy jest zawodowym piłkarzem, to zawsze gra w reprezentacji kraju.*
 2. *Jerzy jest zawodowym piłkarzem, ale nie zawsze gra w reprezentacji kraju.*
- (b) 1. *Udowodnię mu winę lub zostanie uniewinniony.*
 2. *Jeśli nie udowodnię mu winy, to zostanie uniewinniony.*

ZADANIE 5

Sprawdź, czy są logicznie równoważne obie interpretacje znanej nam amfibolii:
Nieprawda, że uczyłeś się systematycznie i nie umiesz.

Zbiór zdań nazywamy **semantycznie sprzecznym** witw, gdy koniunkcja wszystkich zdań z tego zbioru jest fałszem logicznym.

Oznacza to, że nie jest możliwe, aby wszystkie zdania z tego zbioru były jednocześnie prawdziwe.

Zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny wtw, gdy koniunkcja wszystkich należących do niego formuł jest kontrtautologią.

Zatem każdy zbiór zawierający dwie sprzeczne formuły jest zbiorem semantycznie sprzecznym.

ZADANIE 6

Sprawdź (metodą zerojedynkową nie wprost) czy zbiór $Y = \{p, p \rightarrow q, \sim q\}$ jest zbiorem semantycznie sprzecznym.

Każda formuła należąca do zbioru formuł wynika logicznie z tego zbioru:
Jeśli $A \in X$, to $X \models A$.

Zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny wtw, wynikają z niego logicznie dwie formuły sprzeczne:
 $X \models A$ oraz $X \models \sim A$.

Zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny wtw, gdy wynikają z niego logicznie wszystkie formuły.

ZADANIE 7

Sprawdź (metodą zerojedynkową nie wprost) czy zbiór zdań:

$\{ \textit{Jeśli Adam się zaszczepił, to nie zachorował}, \\ \textit{Adam się zaszczepił, ale zachorował} \}$

jest semantycznie sprzeczny.

Założmy, że X jest dowolnym zbiorem formuł KRZ, zaś A i B to dowolne formuły KRZ. Wówczas zachodzą następujące zależności:

Semantyczne twierdzenie o dedukcji

Jeśli B wynika logicznie ze zbioru X i formuły A , to implikacja $A \rightarrow B$ wynika logicznie ze zbioru X :

Jeśli $X \cup \{A\} \models B$, to $X \models A \rightarrow B$.

Semantyczne odwrotne twierdzenie o dedukcji

Jeśli implikacja $A \rightarrow B$ wynika logicznie ze zbioru X , to B wynika logicznie ze zbioru X i formuły A :

Jeśli $X \models A \rightarrow B$, to $X \cup \{A\} \models B$.

WNIOSEK

$X \cup \{A\} \models B$ wtw, gdy $X \models A \rightarrow B$.

Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost

1. Zbiór formuł $X \cup \{A\}$ jest semantycznie sprzeczny witw, gdy $X \models \sim A$.
2. Zbiór formuł $X \cup \{\sim A\}$ jest semantycznie sprzeczny witw, gdy $X \models A$.

Zbiór jest więc semantycznie sprzeczny witw, gdy jest w nim taka formuła, że jej negacja wynika z pozostałych formuł tego zbioru.

Wnioskowanie to proces myślowy (rozumowanie), w którym od uznania pewnych zdań (zwanymi przesłankami) dochodzi się do uznania kolejnego zdania (zwanego wnioskiem).

Należy tu podkreślić, że implikacja, wynikanie i wnioskowanie stanowią zupełnie odrębne pojęcia. Choć implikacja stanowi podstawę wynikania, a część wnioskowań opiera się na wynikaniu, pojęcia te są jednak różne i nie należy ich ze sobą mylić. Przede wszystkim wynikanie jest związkami (między zdaniami) o charakterze obiektywnym, co oznacza, że zachodzi on między zdaniami niezależnie od tego, czy ktoś zdaje sobie z tego sprawę, czy nie. Z kolei wnioskowanie ma charakter subiektywny, gdyż jest procesem zachodzącym w danym momencie w czyjejś świadomości. Ponadto nie można utożsamiać racji z przesłanką, a następstwa z wnioskiem – istnieją bowiem takie wnioskowania, w których przesłanką jest następstwo, a wnioskiem racja. W dodatku istnieją też takie wnioskowania, których podstawą w ogóle nie jest zachodzenie związku wynikania między zdaniami.

Wnioskowanie jest niezawodne witw, gdy jest niemożliwe, aby wszystkie przesłanki były prawdziwe, a wniosek fałszywy.

Wnioskowanie jest niezawodne wtedy, gdy jest oparte na wynikaniu, tj. gdy wniosek wynika z przesłanek – czyli gdy przesłanki są racją, a wniosek następstwem.

Pojęcie wnioskowania możemy sformalizować, traktując je jako parę uporządkowaną $\langle X, \beta \rangle$, gdzie $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ to zbiór zdań (przesłanek), a β to zdanie (wniosek). Formalną reprezentacją wnioskowania jest jego **schemat wnioskowania** (reguła wnioskowania, reguła inferencji), czyli ciąg formuł logicznych, będących schematami kolejnych przesłanek i wniosku. Jeśli A_1, A_2, \dots, A_n i B to odpowiednio schematy zdań $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i β , to schemat odpowiedniego wnioskowania zapisujemy w takiej formie:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & & \\
 A_2 & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 A_n & \text{lub} & A_1, A_2, \dots, A_n \\
 \hline
 B & & B
 \end{array}$$

Schemat wnioskowania jest **niezawodny** witw, gdy żadne wnioskowanie, które według niego przebiega, nie może mieć jednocześnie prawdziwych przesłanek i fałszywego wniosku.

Innymi słowy, schemat wnioskowania jest niezawodny, gdy każde wnioskowanie, które według niego przebiega, o ile ma prawdziwe przesłanki, to również ma prawdziwy wniosek.

Schemat nazywamy **zawodnym**, gdy nie jest niezawodny.

Oczywiście wnioskowania, które przebiegają według schematów niezawodnych są niezawodne. Natomiast według schematów zawodnych mogą przebiegać zarówno wnioskowania zawodne, jak i niezawodne.

Zauważmy, że jeśli wniosek wynika logicznie z przesłanek, to gwarancja prawdziwości przesłanek jest zarazem gwarancją prawdziwości wniosku. Innymi słowy, takie wnioskowanie jest niezawodne. Istotnie bowiem, skoro implikacja $(A_1) \wedge (A_2) \wedge \dots \wedge (A_n) \rightarrow (B)$ jest tautologią, to prawdziwość jej poprzednika (a więc wszystkich przesłanek) pociąga za sobą w sposób konieczny prawdziwość jej następnika (czyli wniosku); mówi o tym prawo odrywania.

Schemat wnioskowania jest niezawodny wtedy, gdy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Wnioskowanie, w którym wniosek wynika logicznie z przesłanek nazywa się **wnioskowaniem dedukcyjnym**.

Wnioskowanie dedukcyjne jest oczywiście niezawodne.

ZADANIE 8

Sprawdź, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne.

1. *Ćwiczenia z logiki prowadzi Lipowska, a ćwiczenia z matematyki prowadzi Lapis.
Zatem nieprawdą, że ani Lipowska nie prowadzi ćwiczeń z logiki, ani Lapis nie prowadzi ćwiczeń z matematyki.*
2. *Jeśli masz paszport i postarasz się o wizę, to jesteś uprawniony do wjazdu do USA.
Zatem skoro masz paszport, a nie masz prawa wjechać do USA, to brak ci wizy.*
3. *Jeśli student nie lubi logiki, to twierdzi, że ma zainteresowania humanistyczne i uważa, że znajomość logiki jest humanistom niepotrzebna.
Zatem jeśli student twierdzi, że ma zainteresowania humanistyczne, to uważa, że znajomość logiki jest humanistom niepotrzebna.*
4. *Jeśli nauka logiki przychodzi studentowi zbyt łatwo lub sprawia zbyt wiele trudności, to student uważa logikę za nieciekawą.
Zatem jeśli nauka logiki przychodzi studentowi zbyt łatwo, to student uważa logikę za nieciekawą.*
5. *Jeśli Jan był w pracy, to spotkał Piotra.
Jan nie spotkał Piotra.
Zatem Jan nie był w pracy.*

6. *Jeżeli Janek uczy się pilnie, to otrzymuje dobre stopnie.
Jeżeli Janek nie otrzymuje dobrych stopni, to traci humor.
Janek nie traci humoru.
Zatem Janek uczy się pilnie.*
7. *Jeżeli Marek jest zdolniejszy od Adama, a Adam ma lepsze wyniki w nauce, to Marek mógłby uczyć się pilniej.
Marek nie mógłby uczyć się pilniej.
Adam ma lepsze wyniki w nauce.
Zatem Marek nie jest zdolniejszy od Adama.*
8. *Jeśli Paweł nie będzie systematycznie grał na loterii, to nie wygra.
Jeśli Paweł będzie systematycznie grał na loterii, to musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów.
Jeśli Paweł nie wygra na loterii, to musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów.
A zatem Paweł musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów.*
9. *Mateusz jest podwładnym Jarka.
Jeżeli Mateusz jest inteligentniejszy od Jarka, a jest jego podwładnym, to Jarek czuje się zagrożony.
Lecz Mateusz nie jest inteligentniejszy od Jarka.
Zatem Jarek nie czuje się zagrożony.*
10. *Jeśli Zbyszek nie będzie schlebiał Jarkowi, to straci posadę.
Jeśli Zbyszek straci posadę, to popadnie w kłopoty finansowe.
Jeżeli Zbyszek będzie schlebiał Jarkowi, to straci dobrą opinię.
Zatem Zbyszek popadnie w kłopoty finansowe lub straci dobrą opinię.**

Mówimy, że:

Reguła wnioskowania **zachowuje tautologiczność** witw, gdy:
jeśli wszystkie przesłanki są tautologiami, to i wniosek jest tautologią.

Każda reguła niezawodna zachowuje tautologiczność.

* Część zadań pochodzi z „Ćwiczeń z logiki” B. Stanosz.