Systemy aksjomatyczne

Do rozstrzygania, które formuły rachunku zdań są tautologiami, czyli prawami logiki, stosować możemy trzy rodzaje metod:

1) metody matrycowe (zero-jedynkowe – wprost i nie wprost) – SEMANTYCZNE,
2) metodę aksjomatyczną,
3) metodę założeniową.

SYNTAKTYCZNE

Budując rachunek zdań jako system formalny – system dowodzenia, inaczej system dedukcyjny – stosuje się metodę założeniową lub aksjomatyczną. System dowodzenia to określony język (zbiór formuł logicznych) wyposażony w aparaturę dedukcyjną, czyli zestaw reguł dowodzenia (reguł wnioskowania, reguł inferencyjnych) i ewentualnie aksjomaty (tylko w metodzie aksjomatycznej).

Działając na formułach w sposób czysto syntaktyczny, czyli zależny wyłącznie od ich budowy, przekształcamy je sukcesywnie w inne formuły zgodnie z przyjętymi regułami. Uzyskane tak ciągi formuł stanowią tzw. dowody formalne. Twierdzeniami danego systemu są te formuły, które można w ten sposób udowodnić.

Sformalizowany aksjomatyczny system rachunku zdań składa się z:

1. zbioru symboli (zwanego alfabetem),
2. zbioru słów nad tym alfabetem (które nazywamy formułami),
3. wyróżnionego podzbioru formuł (które nazywamy aksjomatami),
4. zbioru reguł dowodzenia.

Reguły dowodzenia to zasady wyprowadzania jednych formuł z innych, czyli tworzenia dowodów.
Twierdzeniami systemu aksjomatycznego są tylko te formuły, które można wyprowadzić (wywieść) z aksjomatów (tworząc ich dowód formalny).

Dowodem formuły jest kończący się tą formułą ciąg formuł, w którym występują jedynie aksjomaty, wcześniej udowodnione twierdzenia oraz formuły otrzymane z formuł poprzedzających je w tym ciągu przez zastosowanie do nich reguł dowodzenia.

Twierdzenia (inaczej tezy) danego systemu aksjomatycznego to te formuły, dla których istnieje ich dowód.

Aksjomaty nazywa się też twierdzeniami pierwotnymi, zaś pozostałe dowodliwe formuły – twierdzeniami pochodnymi (albo wtórnymi).

Twierdzenia oznaczamy symbolem: $\vdash$.

Napis: $\vdash A$ czytamy więc: formuła A jest tezą (czyli twierdzeniem) w danym systemie dowodzenia.

System dowodzenia nazywamy **trafnym**, gdy wszystkie twierdzenia tego systemu są tautologiami, tj., gdy dla dowolnej formuły A zachodzi:

$$\text{Jeżeli } \vdash A, \text{ to } \models A .$$

W systemach aksjomatycznych jako reguły dowodzenia przyjmuje się zwykle regułę podstawiania i regułę odrywania, ewentualnie regułę zastępowania.

- **(RO)** reguła odrywania:

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

A i B to zmienne metajęzykowe, za które można podstawiać dowolne formuły

Jeśli do dowodu należą dwie formuły: implikacja i osobno jej poprzednik, to wolno dołączyć do dowodu jej następnik.

- **(RP)** reguła podstawiania:

$$\frac{A}{A\,[p_i\ /\ B]}$$

Jeśli do dowodu należy formuła (tu: A), to wolno dołączyć do dowodu wynik operacji podstawienia, polegającej na zastąpieniu wszystkich wystąpień pewnej zmiennej zdaniowej w tej formule (tu: p_i) przez ustaloną formułę (tu: B).

- **(RZ)** reguła zastępowania:

$$\frac{A}{A\,[B \setminus C]}$$

Jeśli do dowodu należy formuła (tu: A), to wolno dołączyć do dowodu wynik operacji zastąpienia w tejże formule pewnej jej (poprawnie zbudowanej) podformuły (tu: B) formułą C.

Semantyczne twierdzenie o podstawianiu

Jeżeli dana formuła rachunku zdań jest tautologią i wszystkie wystąpienia pewnej zmiennej zdaniowej w tej tautologii zastąpimy pewną ustaloną formułą, to otrzymana w ten sposób formuła również będzie tautologią.

Semantyczne twierdzenie o zastępowaniu

Jeżeli w danej formule zastąpimy pewną jej podformułę zdaniem logicznie równoważnym tej podformule, to otrzymana w ten sposób formuła będzie logicznie równoważna danej formule.
W szczególności, jeśli dana formuła jest tautologią, to formuła wynikowa również będzie tautologią.

Semantyczne twierdzenie o odrywaniu

Dla każdej tautologii w formie implikacji, której poprzednik również jest tautologią, następnik także jest tautologią.

Jak widać, stosując trzy ww. reguły, zarówno osobno jak i łącznie, będziemy zawsze przechodzić od tautologii do tautologii – dlatego mówimy o nich, że zachowują tautologiczność.

Pierwszą aksjomatyką logiki klasycznej był układ aksjomatów zaproponowany przez G. Fregego:

(1) $p \to (q \to p)$
(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
(3) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
(4) $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$
(5) $p \to \sim\sim p$
(6) $\sim\sim p \to p$

Natomiast system A. N. Whiteheada i B. Russella ze słynnej „*Principia mathematica*" nie jest implikacyjno-negacyjny, lecz alternatywno-negacyjny:

(1) $\sim(p \lor p) \lor p$
(2) $\sim p \lor (p \lor q)$
(3) $\sim(p \lor q) \lor (q \lor p)$
(4) $\sim(\sim p \lor q) \lor (\sim(r \lor p) \lor (r \lor q))$

Z kolei system dysjunkcyjny J. Nicoda oparty jest na tylko jednym aksjomacie:

$$(p \mid (q \mid r)) \mid ((t \mid (t \mid t)) \mid ((s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s))))$$

Jan Łukasiewicz zaproponował układ trzech aksjomatów:

(A1) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
(A2) $(\sim p \to p) \to p$
(A3) $p \to (\sim p \to q)$

Terminy stałe występujące w aksjomatach (np. w systemie Łukasiewicza symbole implikacji i negacji) zwane są terminami pierwotnymi. Za ich pomocą możemy definiować nowe, zwane terminami pochodnymi lub wtórnymi. Definicje tworzymy w oparciu o prawa zastępowania (eliminacji), np.:

(D1) $(A \lor B) = (\sim A \to B)$
(D2) $(A \land B) = \sim(A \to \sim B)$
(D3) $(A \leftrightarrow B) = \sim[(A \to B) \to \sim(B \to A)]$

Stosując w dowodach regułę zastępowania, która pozwala zastąpić podformułę jej równoważnikiem definicyjnym, zyskujemy możliwość dowodzenia twierdzeń także z takimi spójnikami, które nie występują w aksjomatach.

Oczywiście ten sam efekt można uzyskać budując bogatsze systemy: przyjmując obszerniejszy alfabet oraz aksjomaty zawierające wszystkie interesujące nas terminy stałe. Rozbudowując aksjomatykę, unikniemy definicji i reguły zastępowania, upraszczając zarazem dowody. Oto przykład takiej aksjomatyki:

(1) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
(2) $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
(3) $p \to (q \to p)$
(4) $p \land q \to p$
(5) $p \land q \to q$
(6) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \land r)))$
(7) $p \to (p \lor q)$
(8) $q \to (p \lor q)$

(9) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \lor q) \to r)))$
(10) $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
(11) $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$
(12) $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$
(13) $(\sim q \to \sim p) \to (p \to q)$

Systemy założeniowe

W systemach założeniowych nie korzysta się z aksjomatów, do dyspozycji pozostają nam więc tylko reguły dowodzenia, zgodnie z którymi przeprowadza się dowody założeniowe, wywodząc (wyprowadzając) jedne formuły z innych. Każdy dowód zaczyna się od wypisania stosownych założeń, a następnie posługując się dostępnymi regułami dowodzenia dopisuje się kolejne formuły. Dowód kończy się po uzyskaniu w ten sposób odpowiedniej konkluzji, której postać zależy od rodzaju dowodu (wprost lub nie wprost).
Ponieważ ten sposób dowodzenia jest najbardziej zbliżony do sposobów stosowanych zarówno w poszczególnych dyscyplinach naukowych, jak i w rozumowaniach potocznych, metodę założeniową określa się często mianem dedukcji naturalnej, a systemy założeniowe logiki określa się też mianem systemów logiki naturalnej.

Niech dany będzie pewien zbiór formuł logicznych (zwanych założeniami) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ oraz formuła B (zwana wnioskiem).
Dowodem założeniowym wprost wniosku B z założeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest ciąg formuł logicznych, spełniający następujące warunki:
1. Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia.
2. Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł dowodzenia.
3. Ostatnią formułą dowodu jest wniosek.

Jeśli istnieje dowód wniosku B z założeń $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, to mówimy, że formuła B jest dowodliwa (wyprowadzalna) ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, co zapisuje się symbolicznie:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$$

Ponadto wówczas mówimy, że formuła:

$$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n \to B$$

oraz równoważna jej formuła:

$$A_1 \to (A_2 \to \ldots \ (A_n \to B) \ldots)$$

są twierdzeniami (tezami) danego systemu założeniowego, co zapisujemy symbolicznie: $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

Dla odpowiednio dobranych reguł dowodzenia można pokazać, że jeśli B jest dowodliwe ze zbioru $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, to B wynika logicznie ze zbioru $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, czyli:

$$\text{jeśli } \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B, \text{ to } \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B.$$

Zatem wszystkie twierdzenia takiego systemu są tautologiami:

$$\text{jeśli } \vdash A, \text{ to } \vDash A,$$

czyli system jest trafny.

Aby to zapewnić, reguły dowodzenia muszą prowadzić zawsze od formuł prawdziwych do formuł prawdziwych, czyli muszą być oparte na niezawodnych schematach wnioskowania (innymi słowy, odpowiadają tautologiom w postaci implikacji).

Systemy założeniowe można budować na różne sposoby, określając dla nich różne zestawy reguł dowodzenia.
Tutaj przyjmiemy następujący zbiór pierwotnych reguł dowodzenia (tj. uznawanych bez dowodu):

- **(RO)** reguła odrywania:

$$\frac{\begin{matrix} A \to B \\ A \end{matrix}}{B}$$

Jeśli do dowodu należą implikacja i jej poprzednik, to wolno dołączyć do dowodu jej następnik.

- **(DK)** reguła dołączania koniunkcji:

$$\frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$$

Jeśli do dowodu należą dwie formuły, to wolno dołączyć do dowodu ich koniunkcję.

- **(OK)** reguła opuszczania koniunkcji:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu dowolny czynnik tej koniunkcji.

- **(DA)** reguła dołączania alternatywy:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Jeśli do dowodu należy formuła, to wolno dołączyć do dowodu jej alternatywę z dowolną formułą.

- **(OA)** reguła opuszczania alternatywy:

$$\frac{A \vee B \quad \sim A}{B} \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \sim B}{A}$$

Jeśli do dowodu należą alternatywa i negacja jej jednego składnika, to wolno dołączyć do dowodu drugi składnik alternatywy.

- **(DR)** reguła dołączania równoważności:

$$\frac{A \to B \quad B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

Jeśli do dowodu należą dwie implikacje, prosta i odwrotna, to wolno dołączyć do dowodu odpowiadającą im równoważność.

- **(OR)** reguła opuszczania równoważności:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B} \qquad\qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu odpowiadającą jej implikację prostą, jak też odwrotną.

- **(RT)** reguła transpozycji:

$$\frac{A \to B}{\sim B \to \sim A}$$

Jeśli do dowodu należy implikacja prosta, to wolno dołączyć do dowodu odpowiadającą jej implikację przeciwstawną.

Do systemu założeniowego zwykle wprowadza się dodatkowe, tzw. wtórne reguły dowodzenia. Mianowicie, jeśli udowodni się twierdzenie w postaci implikacji $A \to B$, to można do systemu wprowadzić jako wtórną regułę dowodzenia regułę postaci:

$$\frac{A}{B}$$

która pozwala dołączyć do dowodu wyrażenie w formie następnika tej implikacji, o ile w dowodzie znajdzie się wyrażenie w formie jej poprzednika.

Np. jeśli udowodnimy w danym systemie twierdzenie

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

(prawo sylogizmu hipotetycznego), to wolno nam dołączyć do tego systemu jako wtórną regułę dowodzenia:

- **(RSH)** regułę sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{(A \to B) \wedge (B \to C)}{A \to C} \qquad\qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

Dowody zapisuje się jako ciągi formuł w kolejnych numerowanych wierszach, podając za nimi w nawiasach uzasadnienie ich dołączenia do dowodu.

Dowód wprost zaczyna się od wypisania wszystkich założeń, natomiast kończyć się powinien wnioskiem.
Jeśli udowodnić należy twierdzenie w postaci implikacji: $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots (A_n \rightarrow B)\ldots)$, to założeniami będą wszystkie kolejne poprzedniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a wnioskiem B.

ZADANIE 3
Pokaż, że poniższe formuły są twierdzeniami zdefiniowanego powyżej systemu założeniowego (przeprowadzając ich dowody założeniowe wprost).

(a) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

(c) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

(d) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(e) $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

(f) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$

(g) $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

(h) $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge r)]$

Jeśli istnieje dowód założeniowy wprost zdania z pewnych założeń, to zdanie to wynika logicznie z owych założeń.

ZADANIE 4
Przeprowadzając dowód założeniowy wprost pokaż, że poniższy schemat wnioskowania jest niezawodny.

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \vee r \\ \sim q \end{array}}{r}$$

ZADANIE 5
Przeprowadzając dowód założeniowy wprost pokaż, że wnioskowanie o poniższym schemacie jest dedukcyjne.

$$\frac{\begin{array}{c} p \wedge q \rightarrow r \\ p \\ q \end{array}}{r}$$

ZADANIE 6
Czy następujące wnioskowanie jest dedukcyjne?

Jeżeli pracuję, to zarabiam pieniądze.
Jeżeli nie pracuję, to jestem szczęśliwy.
Dlatego jeżeli nie zarabiam pieniędzy, to jestem szczęśliwy.

ZADANIE 7
Rozwiąż poniższą zagadkę:

Telewizor zepsuła Ania lub Basia.
Basia nie mogła jednocześnie czytać i zepsuć.
Nieprawda, że Basia nie czytała.
Kto zepsuł telewizor?

<u>Dowodem założeniowym nie wprost</u> wniosku B z założeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest ciąg formuł logicznych, spełniający następujące warunki:

1. Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia oraz tzw. <u>założenie dowodu nie wprost</u> (z.d.n.) w formie negacji wniosku (tj. ~B).
2. Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł dowodzenia.
3. Ostatnią formułą dowodu jest formuła sprzeczna z jakąś formułą ją poprzedzającą.

Wystąpienie sprzeczności w dowodzie oznacza, że jakieś założenie jest fałszywe; a zatem pokazujemy w ten sposób, że jeśli prawdziwe są założenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, to musi być fałszywe założenie dowodu nie wprost (tj. ~B) – czyli wniosek B musi być prawdziwy.

ZADANIE 8
Pokaż, że poniższe formuły są twierdzeniami zdefiniowanego powyżej systemu założeniowego, przeprowadzając ich dowody nie wprost.

(a) $(p \to q) \wedge {\sim}q \to {\sim}p$

(b) ${\sim}{\sim}p \to p$

(c) $p \to {\sim}{\sim}p$

(d) ${\sim}(p \vee q) \leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

(e) ${\sim}(p \wedge q) \leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$

(f) $p \vee {\sim}p$

(g) $({\sim}q \to {\sim}p) \to (p \to q)$

(h) $({\sim}p \vee q) \to (p \to q)$

(i) $(p \wedge q \to r) \to (p \wedge {\sim}r \to {\sim}q)$

Jeśli istnieje dowód założeniowy nie wprost zdania z pewnych założeń,
to zdanie to wynika logicznie z owych założeń.

ZADANIE 9
Wykaż niezawodność poniższych schematów wnioskowania przeprowadzając ich dowody nie wprost.

(a)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \vee r \\ {\sim}q \\ \hline r \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c} p \wedge {\sim}r \to {\sim}q \\ p \wedge q \\ \hline r \end{array}$$