Własności metalogiczne systemów dowodzenia

Metalogika, metamatematyka – działy nauki, w ramach których bada się teorie, odpowiednio logiczne i matematyczne, w szczególności własności systemów dowodzenia (systemów dedukcyjnych).

Mówimy, że formuła A jest **wyprowadzalna** (**dowodliwa, dedukowalna**) ze zbioru formuł X, co oznaczamy symbolicznie: $X \vdash A$,
witw, gdy istnieje skończony ciąg formuł, w którym ostatnią formułą jest formuła A, zaś wszystkie pozostałe są albo formułami ze zbioru X, albo aksjomatami, albo powstały z poprzedzających je formuł przez zastosowanie dopuszczalnych reguł wnioskowania.

Zbiór $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ (gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to formuły) nazywamy zbiorem założeń.

WNIOSEK

Formuła A systemu aksjomatycznego rachunku zdań jest wyprowadzalna ze zbioru pustego witw, gdy jest twierdzeniem tego systemu:

$$\emptyset \vdash A \quad \leftrightarrow \quad \vdash A$$

Załóżmy, że X jest dowolnym zbiorem formuł KRZ, zaś A i B to dowolne formuły KRZ. Zachodzi wówczas następujące metatwierdzenie, opisujące ważną własność relacji wyprowadzalności:

Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji

Formuła B jest wyprowadzalna ze zbioru X i formuły A witw, gdy implikacja $A \to B$ jest wyprowadzalna ze zbioru X:

$$X \cup \{A\} \vdash B \quad \text{witw, gdy} \quad X \vdash A \to B.$$

Zauważmy pełną analogię tego syntaktycznego twierdzenia o dedukcji do semantycznego twierdzenia o dedukcji, opisującego własności relacji wynikania logicznego.

Podstawowe własności (metalogiczne) systemów dowodzenia:

System dowodzenia nazywamy **trafnym**, jeśli wszystkie twierdzenia danego systemu są tautologiami, tj. gdy dla dowolnej formuły A zachodzi:

$$\vdash A \;\to\; \models A$$

System dowodzenia nazywamy **semantycznie pełnym**, gdy można w nim udowodnić każdą tautologię, tj., gdy dla dowolnej formuły A zachodzi:

$$\models A \;\to\; \vdash A$$

Dla każdego (z osobna) z omawianych przez nas wcześniej systemów można udowodnić (metalogiczne) tzw. **twierdzenie o pełności**:

Formuła A danego systemu dowodzenia rachunku zdań jest jego twierdzeniem witw, gdy jest tautologią:

$$\vdash A \leftrightarrow \vDash A$$

Zatem wszystkie te systemy są trafne i semantycznie pełne.
Jak widać, w przypadku rachunku zdań tautologiczność (jako własność semantyczna) i dedukowalność (jako własność syntaktyczna) pokrywają się.

System dowodzenia nazywamy **systemem syntaktycznie niesprzecznym** witw, gdy nie istnieje żadna formuła taka, że zarówno ją, jak i jej negację można udowodnić w ramach tego systemu – czyli gdy dla żadnej formuły A nie może jednocześnie zachodzić, że: $\vdash A$ oraz $\vdash \sim A$.

Łatwo jest udowodnić następujące metatwierdzenie:

Każdy semantycznie pełny system rachunku zdań
jest systemem syntaktycznie niesprzecznym.

WNIOSEK: omówione przez nas systemy, jako semantycznie pełne, są również syntaktycznie niesprzeczne.

Zbiór formuł X nazywamy zbiorem syntaktycznie sprzecznym witw, gdy istnieje taka formuła A, że zarówno ją, jak i jej negację można wyprowadzić z tego zbioru, czyli

$$X \vdash A \quad \text{oraz} \quad X \vdash \sim A .$$

Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost

1. Zbiór $X \cup \{A\}$ jest syntaktycznie sprzeczny witw, gdy $X \vdash \sim A$.
2. Zbiór $X \cup \{\sim A\}$ jest syntaktycznie sprzeczny witw, gdy $X \vdash A$.

I znów można zauważyć pełną analogię tego twierdzenia do semantycznego twierdzenia o dedukcji nie wprost.

System jest **negacyjnie zupełny**, gdy dla każdego zdania,
albo ono, albo jego negacja jest twierdzeniem systemu:
albo $\vdash A$, albo $\vdash \sim A$.

Systemy dowodzenia KRZ nie są negacyjnie zupełne.

System dowodzenia nazywamy **syntaktycznie zupełnym**,
gdy każda formuła niedowodliwa w tym systemie
dołączona do niego jako aksjomat – czyni go systemem sprzecznym.

Własność ta, zwana też mocną zupełnością, albo zupełnością w sensie Posta, oznacza, że jest to maksymalny system niesprzeczny.

Udowadnia się też następujące twierdzenie:

> Każdy semantycznie pełny system rachunku zdań z regułą odrywania i regułą podstawiania jest zupełny.

Wniosek: omówione przez nas systemy dowodzenia są syntaktycznie zupełne.

Dwa systemy dowodzenia nazywamy **równoważnymi**, gdy mają identyczne zbiory formuł i twierdzeń oraz dowolna reguła pierwotna każdego z systemów jest regułą (pierwotną lub wtórną) drugiego systemu.

Systemy równoważne mają identyczne własności (pełność, niesprzeczność itd.).
Można pokazać, że poznane przez nas systemy są (wzajemnie) równoważne.

System dowodzenia jest **rozstrzygalny**, jeżeli istnieje efektywna metoda pozwalająca w skończonej liczbie kroków rozstrzygnąć dla dowolnej formuły pytanie, czy ta formuła jest czy też nie jest twierdzeniem tego systemu.

Systemy dowodzenia rachunku zdań są rozstrzygalne, gdyż dysponujemy np. metodą zero-jedynkową (a także innymi, jak sprowadzanie formuły do postaci normalnej czy metoda drzew semantycznych).

Mówimy, że system dowodzenia rachunku zdań jest **funkcjonalnie zupełny** (albo <u>definicyjnie pełny</u>), gdy za pomocą jego terminów pierwotnych może być zdefiniowany każdy funktor prawdziwościowy rachunku zdań (o dowolnej liczbie argumentów).

Można udowodnić np., że system z koniunkcją i negacją jest funkcjonalnie zupełny, a system z koniunkcją i alternatywą (jako jedynymi terminami pierwotnymi) – nie jest funkcjonalnie zupełny. Co więcej, z takich dowodów widać, że własność funkcjonalnej zupełności nie zależy wcale od aksjomatyki czy reguł wnioskowania, a jedynie od samych terminów pierwotnych.

Zbiór aksjomatów jest **niezależny**, jeżeli żaden z nich nie da się wywieść z pozostałych (według przyjętych w systemie reguł wnioskowania).
Zbiór terminów pierwotnych jest **niezależny**, gdy żaden z tych terminów nie może być zdefiniowany przez pozostałe.

Np. aksjomatyki systemów Łukasiewicza czy Whiteheada są niezależne.
Systemy implikacyjno-negacyjne czy alternatywno-negacyjne mają terminy pierwotne niezależne.

Dualność formuł rachunku zdań.

Niech formuła F zawiera jedynie spójniki negacji, koniunkcji i alternatywy.

Niech F_d oznacza formułę powstającą z F przez zastąpienie w niej wszędzie symbolu koniunkcji przez symbol alternatywy i odwrotnie. Formułę F_d nazywamy **dualną** względem formuły F.

Niech F^* oznacza formułę otrzymaną z formuły F przez zastąpienie w niej każdej zmiennej przez jej negację.

Prawo dualności mówi, że:

> Formuły F^* i $\sim F_d$ są logicznie równoważne (tzn. formuła $\sim F_d \leftrightarrow F^*$ jest tautologią).

Inne użyteczne twierdzenia dotyczące formuł dualnych mówią, że:

> Jeżeli formuła $F \rightarrow Q$ jest tautologią, to formuła $Q_d \rightarrow F_d$ też jest tautologią.
>
> Jeżeli formuła $F \leftrightarrow Q$ jest tautologią, to formuła $F_d \leftrightarrow Q_d$ też jest tautologią.